سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

ہندسی مخروطات

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔اے

و

محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔اے

سنہ ۱۳۵۶ھ سنہ ۱۳۴۶ف سنہ ۱۹۳۷ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرستِ مضامین

ہندسی مخروطات

دیباچہ

ہندسی مخروطات کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصابِ ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے جدید نصاب کی بنا پر تالیف کیا گیا ہے۔

چونکہ اس تالیف کا مقصد زیادہ تر نصاب کے مدِ نظر انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے طلبہ کی ضروریات کو پورا کرنا ہے اس لیے ہندسی مخروطات کے بہت سے اہم مسائل کو مجبوراً اس رسالہ میں جگہ نہیں دی جا سکی۔ اس لحاظ سے اس رسالہ کو ہندسی مخروطات کا محض ابتدائی رسالہ تصور کرنا چاہیے۔ تاہم مضمون کے تسلسل کو قایم رکھنے کی غرض سے چند ایسی دفعات بھی شریک کر لی گئی ہیں جو نصاب میں داخل نہیں ہیں۔ مگر ذہین طلبہ کے لیے ان مزید دفعات کا مطالعہ دلچسپی سے خالی نہ ہوگا۔

پہلے باب میں مخروطیوں کے عام خواص پر اور بعد کے ابواب میں جداگانہ مکافی، ناقص اور زائد کے خواص پر بحث کی گئی ہے۔ چونکہ پہلے باب کے عام مسائل کسی قدر مشکل ہیں اس لیے مبتدی کی سہولت کے مدِ نظر دوسرے باب کے مسائل اس طرح لکھے گئے ہیں کہ اگر مناسب تصور کیا جائے تو اس باب کو پہلے پڑھ کر پہلے باب کا مطالعہ بعد میں کیا جا سکتا ہے۔

مختلف مسائل کے تحت کافی تعداد میں مشقی سوالات دیے گئے ہیں

اور کہیں کہیں طالب علم کی سہولت کی غرض سے مشکل سوالات کے اشارے یا حل بھی درج کیے گئے ہیں۔ اِن مشکل سوالات میں سے بعض بذاتِ خود مسئلوں کی سی اہمیت رکھتے ہیں۔

مؤلفین

شیخ برکت علی و محمد خواجہ محی الدین

نوٹ

جامعۂ عثمانیہ کے امتحان انٹرمیڈیئٹ کے نصاب میں صرف مندرجۂ ذیل دفعات شامل ہیں :-

۱ تا ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱ تا ۳۹، ۴۱، ۴۲، ۴۴ تا ۵۴، ۵۷، ۵۸، ۶۰ تا ۶۳ -

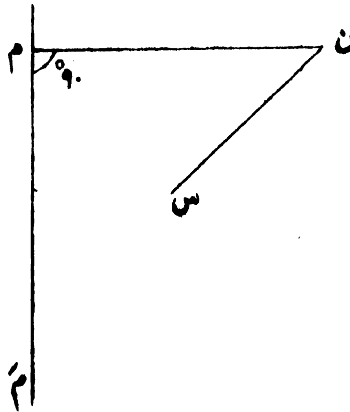
بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

ہندسی مخروطات

پہلا باب

مخروطیوں کے عام خواص

۱۔ **تعریفات** ۔ س ایک ثابت نقطہ اور م مَ ایک ثابت خطِ مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح



حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ س ن، خط م مَ سے ن کے عمودی فاصلہ

ن م کے ساتھ ایک مستقل نسبت ز رکھتا ہو تو ن کے طریق کو مخروطی تراش یا اختصاراً مخروطی کہتے ہیں۔

ثابت نقطہ س کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں، ثابت خطِ مستقیم م مَ کو مخروطی کا مرتب کہتے ہیں۔ مستقل نسبت ز کو مخروطی کا خروج المرکز کہتے ہیں۔

اگر خروج المرکز ز = ۱ تو مخروطی کو مکافی کہتے ہیں۔
اگر خروج المرکز ز > ۱ تو مخروطی کو ناقص کہتے ہیں۔
اگر خروج المرکز ز < ۱ تو مخروطی کو زائد کہتے ہیں۔

نوٹ :- ان منحنیوں کو مخروطی تراشیں اس لیے کہتے ہیں کہ سب قسم کی مخروطی تراشیں ایک مستدیر مخروط کو مختلف میلان والی مستوی سطحوں سے تراشنے سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس امر کا ثبوت صرف قائم مستدیر مخروط کی صورت میں ضمیمہ میں دیا جائیگا۔

۲ - اِس باب میں ہمارا مقصد یہ ہے کہ چند ایسے اہم خواص کی تحقیق کریں جو سب مخروطیوں (مکافی، ناقص، زائد) میں مشترک ہیں۔ اولاً ہم مخروطیوں کی شکل کی تحقیق کرینگے۔

فرض کرو کہ مخروطی کا ماسکہ س ہے، مرتب م مَ ہے اور خروج المرکز ز ہے ماسکہ س سے مرتب م مَ پر عمود س لا نکالا گیا ہے۔ ہم س لا پر کے وہ نقطے معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔

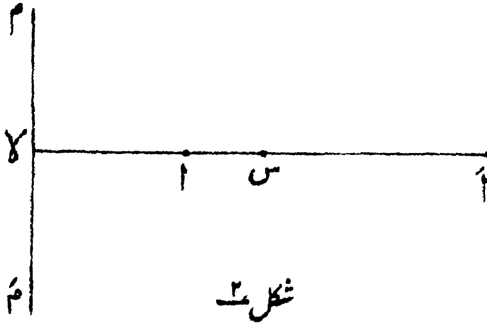
صورت اول - مکافی - (دیکھو شکل ۱) -



شکل ۱

اس صورت میں اگر س لا کا وسطی نقطہ ا ہو تو مکافی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ نقطہ ا مکافی پر کا نقطہ ہوگا اور مکافی کا یہ ایک ہی نقطہ ہے جو س لا پر محدود فاصلہ پر ہے ۔

صورت دوم ۔ ناقص ۔ (دیکھو شکل ۲) ۔



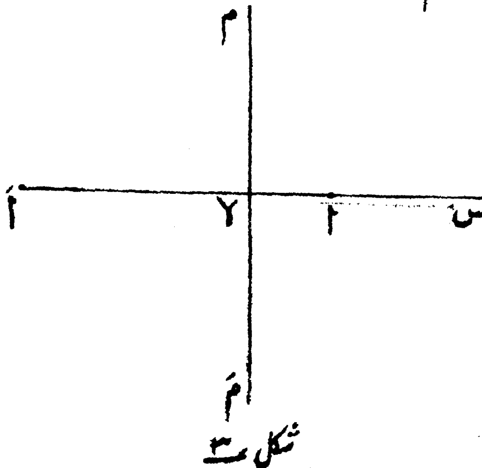
شکل ۲

س لا کی داخلی تقسیم نقطہ ا پر اور خارجی تقسیم نقطہ اَ پر اس طرح کرو کہ

$$\frac{س\,ا}{ا\,لا} = \frac{س\,اَ}{اَ\,لا} = ز \quad (\text{جو چھوٹا ہے ا سے})$$

ظاہر ہے کہ اَ مرتب م مَ کی اُسی جانب واقع ہوگا جس جانب کہ اسکہ س ہے ناقص کی تعریف سے ظاہر ہے کہ س لا پر کے دو نقطے ا اور اَ ناقص پر کے نقطے ہیں ۔

صورت سوم ۔ زائد (دیکھو شکل ۳)



شکل ۳

س لا کی داخلی تقسیم نقطہ ا پر اور خارجی تقسیم نقطہ اَ پر اس طرح کرو کہ

س ا / ا لا = س اَ / اَ لا = ز (جو بڑا ہے ا سے)

ظاہر ہے کہ ا اَ اور ماسکہ س، مرتب م مَ کی مخالف جانبوں میں واقع ہونگے زائد کی تعریف سے ظاہر ہے کہ س لا پر کے دو نقطے ا اور اَ زائد پر کے نقطے ہیں۔

پس ذیل کا مسئلہ ثابت ہوا۔

وہ خط جو مخروطی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب پر عمود وار ہے مکافی کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے اور ناقص اور زائد میں سے ہر ایک کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۳۔ فرض کرو کہ مخروطی کا ماسکہ س، مرتب م مَ اور خروج المرکز ز معلوم ہیں۔ کوئی خط ھ ھَ مرتب کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ہم ھ ھَ پر کے وہ نقطے معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔

س سے مرتب پر عمود س لا نکالو۔

فرض کرو کہ ھ ھَ، س لا (ممدودہ بشرطِ ضرورت) سے ع پر ملتا ہے۔

س کو مرکز مان کر ز × ع لا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو ھ ھَ سے ن اور نَ پر ملے، تب ن اور نَ مخروطی پر کے مطلوبہ نقطے ہونگے۔
ن اور نَ سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور نَ مَ نکالو۔
س ن اور س نَ کو ملاؤ۔

$$\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ز × ع لا}}{\text{ع لا}} = \text{ز}$$ یعنی ن مخروطی پر کا نقطہ ہے۔

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ نَ بھی مخروطی پر کا نقطہ ہے۔

نوٹ۔ مکافی کی صورت میں ظاہر ہے کہ خط ھ ھَ پر نقاط ن اور نَ صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ نقاط ع اور س نقطہ ا کی ایک ہی جانب ہوں۔
دفعہ ۸ میں ثابت کیا جائیگا کہ ناقص کی صورت خط ھ ھَ پر نقطے ن، نَ صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ع نقاط ا اور اَ کے درمیان ہو اور زائد کی صورت میں نقاط ن اور نَ صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ع نقاط ا اور اَ کے درمیان نہ ہو (دیکھو اشکال ۲ و ۳ متعلقہ دفعہ ۲)۔

۳ ۔ چونکہ متساوی الساقین مثلث س ن نَ کے قاعدہ ن نَ پر س ع عمود ہے اس لیے ن نَ کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مخروطی کے اُس وتر ن نَ کی، جو مرتب کے متوازی ہے خط س لا عمودی تنصیف کرتا ہے۔

تعریفات:۔ اگر ایک مُنحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ خط مُنحنی کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود ہو تنصیف کرتا ہو تو مُنحنی بلحاظ خطِ مذکور کے متشاکل کہلاتا ہے، خطِ مذکور کو مُنحنی کا ایک محور کہتے ہیں اور مُنحنی اور محور کے نقطہ یا نقاطِ تقاطع کو مُنحنی کے راس کہتے ہیں۔

پس ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا:
مخروطی تراش بلحاظ اُس خط کے جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے متشاکل ہے۔
نیز مکافی کا ایک راس ا ہے اور ناقص اور زائد میں سے ہر ایک کے

دو راُس ا اور اَ ہیں۔

نوٹ:۔ مکافی کی صورت میں اگر س لا کی خارجی تقسیم اَ پر ۱:۱ کی نسبت میں کی جائے تو نقطہ اَ لاتناہی پر ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکافی کا ایک اور راُس اَ ہے جو لاتناہی پر ہے۔

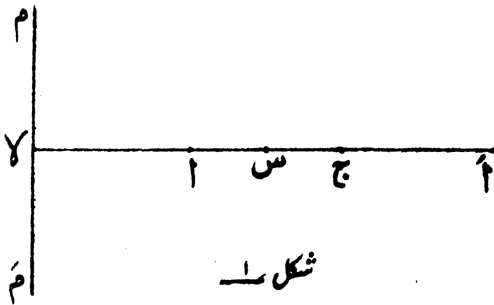
۵۔ اگر دفعہ ۲ کی ترقیم کے مطابق ناقص یا زائد کے راس ا، اَ ہوں اور ا اَ کا وسطی نقطہ ج ہو (اور علامتوں کو ملحوظ نہ رکھا جائے) تو

$$\frac{\text{س ا}}{\text{ا لا}} = \frac{\text{س اَ}}{\text{اَ لا}}$$

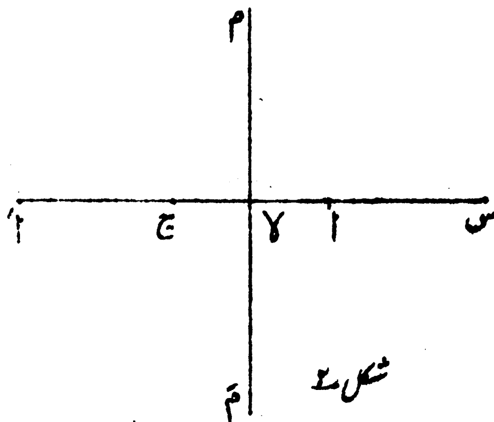
اس لیے

$$\frac{\text{س ا}}{\text{ا لا}} = \frac{\text{س ا} + \text{س اَ}}{\text{ا لا} + \text{اَ لا}}$$

$$= \frac{\text{س اَ} - \text{س ا}}{\text{اَ لا} - \text{ا لا}}$$



شکل ۱



شکل ۲

پس ناقص (شکل ۱) کی صورت میں

$$\frac{\text{س ا}}{\text{ا ل}} = \frac{\text{۲ ج ا}}{\text{۲ ج ل}} = \frac{\text{۲ ج س}}{\text{۲ ج ا}}$$

اور زائد (شکل ۲) کی صورت میں

$$\frac{\text{س ا}}{\text{ا ل}} = \frac{\text{۲ ج س}}{\text{۲ ج ا}} = \frac{\text{۲ ج ا}}{\text{۲ ج ل}}$$

پس ناقص اور زائد دونوں میں

$$\frac{\text{ج س}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ل}} = \frac{\text{س ا}}{\text{ا ل}} = \text{ز}$$

جس سے ذیل کے نتائج حاصل ہوئے ہیں :

$$\text{ج ا}^{۲} = \text{ج س} \times \text{ج ل} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ج س} = \text{ز} \times \text{ج ا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{ج ل} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ز}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور $$\frac{\text{ج س}}{\text{ج ا}} \times \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ل}} = \text{ز}^{۲}$$

یعنی $$\text{ج س} = \text{ز}^{۲} \times \text{ج ل} \quad \ldots\ldots (۴)$$

امثلہ ۱

دفعہ (۲) کی ترقیم کے مطابق

(۱) مکانی مرتسم کرو جس میں س ل = ۲

(۲) ناقص مرتسم کرو جس میں س ل = ۲ سمر اور ز = $\frac{۱}{۲}$

(۳) زائد مرتسم کرو جس میں س ل = ۱ء۵ اور ز = ۲

(۴) زائد مرتسم کرو جس میں س ل = ۵ سمر اور ز = $\frac{۳}{۲}$

(۵) اگر مخروطی پر دو نقطے ن اور نَ ایسے ہوں کہ س ن = س نَ تو

ثابت کرو کہ س ن اور س نَ مخروطی کے محور س لا کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۶) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

(۷) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے تین نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کا ماسکہ معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں ؟

(۸) مخروطی کا ماسکہ س ہے اور س سے مرتب پر عمود س لا ہے۔ اگر مخروطی پر کا کوئی نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ س ن کے وسطی نقطہ کا طریق بھی ایک مخروطی ہے جس کا ماسکہ س پر ہے اور مرتب س لا کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس کا خروج المرکز دیے ہوئے مخروطی کے خروج المرکز کے مساوی ہے۔

(۹) مخروطی کا ماسکہ س ہے اور مخروطی پر کا کوئی نقطہ ن ہے، س ن پر ایک نقطہ ق اس طرح لیا گیا ہے کہ س ق : س ن ایک مستقل مقدار ہے۔ ق کا طریق معلوم کرو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ دو مخروطی جن کا ایک ماسکہ اور جواب کا مرتب وہی ہو ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔

(۱۱) مخروطی کا ماسکہ، خروج المرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں مخروطی کا مرتب معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں ؟

(۱۲) مخروطی کا مرتب، خروج المرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں مخروطی کا ماسکہ معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں ؟

(۱۳) ن نَ مخروطی کا ایک وتر ہے جو ماسکہ س میں سے گزرتا ہے اور ن نَ کے وسطی نقطہ ص سے مرتب پر عمود ص ک نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ

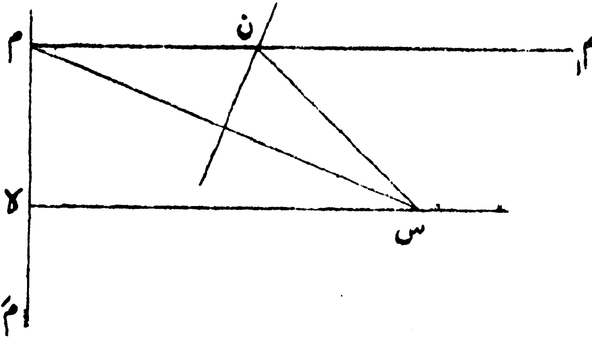
$$\frac{\text{ص ن}}{\text{ص ک}} = \text{ز}$$ جہاں ز خروج المرکز ہے

(۱۴) اگر ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے اور ایک ثابت خط کو ایک مستقل زاویہ عہ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک زائدہ ہے

جس کا خروج المرکز قطاعہ ہے۔

۶۔ مخروطی کا ماسکہ س، مرتب م مَ اور خروج المرکز ز معلوم ہیں، کوئی خط م م۱ مرتب پر عمود وار ہے۔ ہم م م۱ پر وہ نقطہ یا نقطے معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔

صورت اول ۔ فرض کرو کہ مخروطی مکافی ہے (یعنے ز = ۱)، نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م۱ مخروطی کے مرتب م مَ سے م پر ملتا ہے۔ ماسکہ س کو م سے ملاؤ۔ فرض کرو کہ س م کا عمودی ناصف، م م۱ سے نقطۂ ن پر ملتا ہے تب مکافی پر کا مطلوبہ نقطہ ن ہوگا کیونکہ $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = ۱$



صورت دوم ۔ فرض کرو کہ مخروطی ناقص یا زائد ہے اور مخروطی کے راٌس ا اور اَ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م۱ مخروطی کے مرتب سے م پر ملتا ہے۔

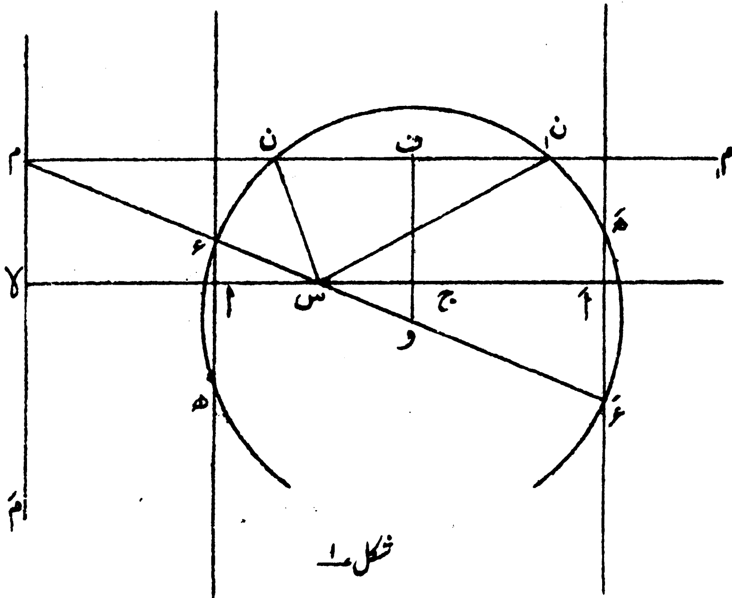
مخروطی کے ماسکہ س کو م سے ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ خط جو ا، اَ میں سے گزرتے ہیں اور مرتب کے متوازی ہیں خط س م (ممدودہ بشرطِ ضرورت) سے بالترتیب نقاط ع، عَ پر ملتے ہیں۔

متوازی خطوط کے قاطعوں کے خواص سے حاصل ہوتا ہے:

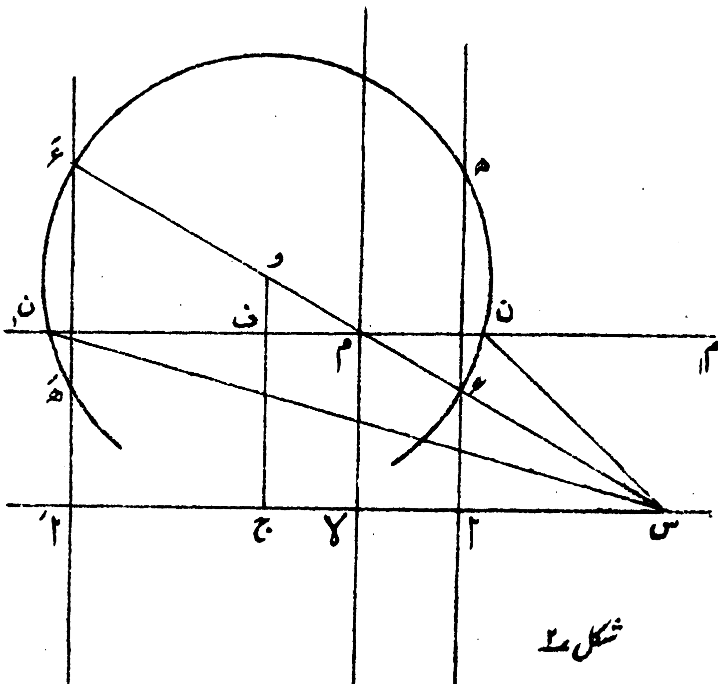
$$\frac{\text{س ع}}{\text{ع م}} = \frac{\text{س ا}}{\text{ا لا}} = \text{ز}$$

اور

$$\frac{\text{س عَ}}{\text{عَ م}} = \frac{\text{س اَ}}{\text{اَ لا}} = \text{ز}$$



شکل ۱



شکل ۲

اس لیے س م کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت ز میں بالترتیب ۶ اور ۶َ پر ہوتی ہے۔

۶ ۶َ کے قطر پر ایک دائرہ (و) کھینچو۔ فرض کرو کہ دائرہ (و) دیے ہوئے خط م م۱ سے نقاط ن، ن۱ پر ملتا ہے۔ تب ن اور ن۱ مطلوبہ نقاط ہونگے

کیونکہ $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{س ۶}}{\text{۶ م}} = \frac{\text{س ۱}}{\text{۱ ۷}} = \text{ز}$

اور اسی طرح سے $\frac{\text{س ن}_۱}{\text{ن}_۱\text{ م}} = \text{ز}$

پس ثابت ہوا کہ ن اور ن۱ مطلوبہ نقطے ہیں۔

۷۔ اگر ۶ ۶َ قطر پر کے دائرہ کے مرکز و میں سے ایک خط کھینچا جائے جو مرتب کے متوازی ہو تو یہ خط ۱ ۱َ کے وسطی نقطہ ج میں سے گذریگا اور نیز وتر ن ن۱ کی عمودی تنصیف کریگا۔

پس معلوم ہوا کہ مخروطی کے محور کے متوازی کسی وتر ن ن۱ کا وسطی نقطہ ف (فرض کرو) اس خط پر واقع ہے جو ۱ ۱َ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔

پس دفعہ ۴ کی تعریف کے بموجب ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا۔

مخروطی (ناقص یا زائد) متشاکل ہے بلحاظ اُس خط کے جو راسوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ناقص اور زائد کی صورت میں مخروطی کے تشاکل کے دو محور ہیں جن میں سے ایک مرتب پر عمود وار ہے اور دوسرا مرتب کے متوازی ہے۔

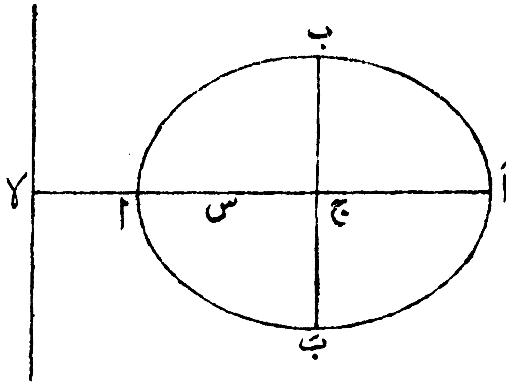
ان محوروں میں امتیاز کرنے کی غرض سے اُس محور کو جو مرتب پر عمود وار ہے مخروطی کا **قاطع محور** اور اُس محور کو جو مرتب کے متوازی ہے **مزدوج محور** کہتے ہیں۔

۸۔ اگر دفعہ گذشتہ کی شکل میں دائرہ (و) خطوط ۱ ۶ اور ۱ ۶َ سے مکرر بالترتیب نقاط ھ اور ھَ پر ملے تو خطوط ۶ ھَ اور ھ ۶َ دونوں ۱ ۱َ کے متوازی ہونگے

کیونکہ زاویے ع ھ ع' اور ع ھ' ع' دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے ع ھ' = ا اَ = ھ ع'

ناقص کی صورت میں (دیکھو شکل ۱ دفعہ ۶) وتر ن ن بمقابلہ ع ھ' کے دائرہ کے مرکز و سے زیادہ دُور ہے۔ کیونکہ نقاط ع اور ع' نقطہ م کی ایک ہی جانب ہیں۔ اس لیے ن ن، < ع ھ' یعنی ن ن، < ا اَ پس معلوم ہوا کہ ناقص کلیتہً خطوط ا ع اور اَ ع' کے درمیان واقع ہے۔

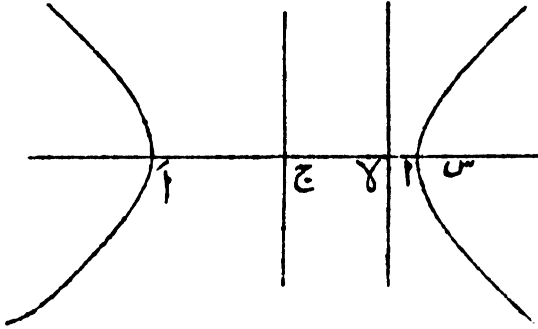
اگر ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور ن م عمود ہو مرتب پر تو ن م < اَ لا کیونکہ ن خطوط ا ع اور اَ ع' کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے س ن < س اَ یعنی ناقص پر کا ہر نقطہ ماسکہ س سے محدود فاصلہ پر ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ناقص ایک بند بیضوی منحنی ہے۔



اگر خط ب ج بَ متوازی ہو مرتب کے اور نقاط ب اور بَ ایسے ہوں کہ س ب = س بَ = ز × ج لا تو ب اور بَ ناقص پر کے نقطے ہونگے اور یہ نقطے مزدوج محور کے سرے ہونگے۔

زائد کی صورت میں (دیکھو شکل ۲ دفعہ ۶) وتر ن ن بمقابلہ ع ھ' کے دائرہ کے مرکز و سے زیادہ قریب ہے کیونکہ نقاط ع اور ع' نقطہ م کی مخالف جانبوں میں واقع ہیں اس لیے ن ن، > ع ھ' یعنی ن ن، > ا اَ پس معلوم ہوا کہ زائد کلیتہً خطوط ا ع اور اَ ع' کے باہر واقع ہے۔ چونکہ نقطہ م دائرہ کے اندر ہے اس لیے خط م م، دائرہ کو ہمیشہ حقیقی نقطوں پر

قطع کرتا ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ لا م کو کافی بڑا لینے سے ن ن، کا طول بھی بے حد بڑھایا جا سکتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علٰحدہ علٰحدہ شاخیں ہیں جیسا کہ شکل ذیل میں دکھایا گیا ہے۔



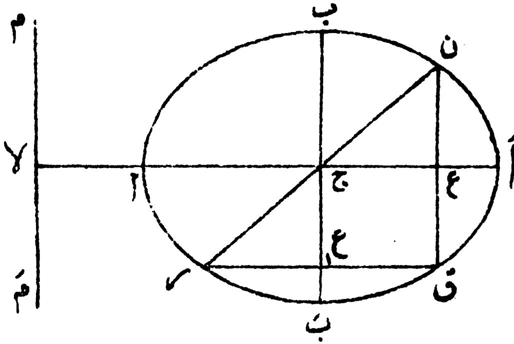
۹۔ مرکز دار مخروطی۔ فرض کرو کہ ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ ن میں سے قاطع محور پر عمود وار ایک خط کھینچو جو قاطع محور ا اَ (ممدودہ بشرطِ ضرورت) کو نقطہ ع پر اور منحنی کو مکرر نقطہ ق پر قطع کرے۔ تب دفعہ ۳ کی رو سے ن ع = ع ق، اب ق میں سے مزدوج محور پر عمود وار ایک خط کھینچو جو مزدوج محور ب ج بَ کو نقطہ ع، پر اور منحنی کو مکرر نقطہ س، پر قطع کرے، تب دفعہ ۷ کی رو سے

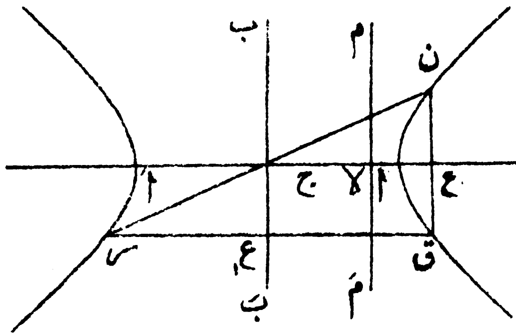
ق ع، = ع، س،

چونکہ ن ق = ۲ ن ع اور ق س، = ۲ ق ع، اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ن ج س، ایک خطِ مستقیم ہے اور ن ج = ج س،

پس اگر ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور ن ج ممدودہ پر نقطہ س، اس طرح لیا جائے کہ ج س، = ن ج تو نقطہ س، بھی منحنی پر واقع ہوگا۔ پس نقطہ ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف

نقطہ ج پر ہوتی ہے۔ اس خاصیت کی بنا پر نقطہ ج کو مخروطی کا **مرکز** کہتے ہیں۔



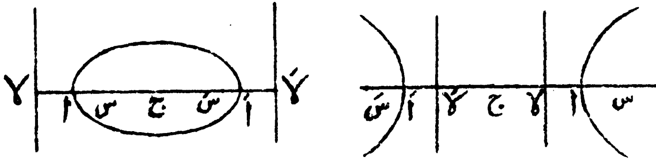


اور کسی وتر کو جو مرکز میں سے گزرے مخروطی کا **قطر** کہتے ہیں۔

ناقص اور زائد دونوں مرکز دار مخروطی تراشیں ہیں اور مکافی کا کوئی مرکز محدود فاصلہ پر وجود نہیں رکھتا۔

۱۰ - مسئلہ - مرکز دار مخروطی کے دو ماسکے اور دو مرتب

ہوتے ہیں۔
دفعہ ۷ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ناقص اور زائد دونوں اُس خط کے لحاظ سے تشاکل ہیں جو ج میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر قاطع محور پر نقاط سَ اور لاَ ایسے لیے جائیں کہ ج سَ = ج س اور ج لاَ = ج لا اور لاَ میں سے ایک خط م لاَ مَ قاطع محور پر عمود وار کھینچا جائے تو سَ اور خط م مَ منحنی کے ساتھ



وہی خصوصیات رکھینگے جو نقطہ س اور خط م مَ رکھتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ منحنی کا ایک اور ماسکہ سَ ہے اور اس کے جواب کا مرتب م مَ ہے۔ یعنی ناقص اور زائد میں سے ہر ایک کے دو ماسکے اور اُن کے جواب کے دو مرتب ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ترقیم ۔ اس کتاب میں سہولت اور اختصار کے مدِّ نظر خاص خاص نقطوں اور خطوں کے لیے مخصوص حروف استعمال کیے گئے ہیں۔ سوائے اُن چند صورتوں کے جہاں اس کے خلاف بالتصریح بیان کر دیا گیا ہے طالب علم کو چاہیے کہ وہ بھی اسی ترقیم کو ملحوظ رکھے تاکہ مثلثوں اور مخروطیوں کے اہم خواص کو یاد رکھنے میں اُسے سہولت ہو۔ محولۂ بالا ترقیم حسبِ ذیل ہے:-

ایک ماسکہ س اور اس کے جواب کا مرتب م مَ

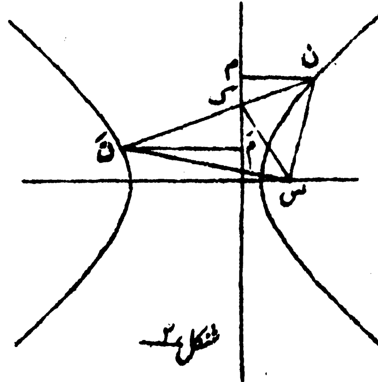
دوسرا ماسکہ سَ اور اس کے جواب کا مرتب م، مَ،

س سَ کے ساتھ مرتبوں م مَ اور م، مَ، کے نقاطِ تقاطع بالترتیب لا اور لاَ

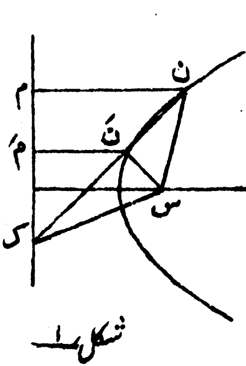
مخروطی کا خروجِ المرکز ز

مخروطی پر کا کوئی نقطہ ن اور نَ سے مرتب پر عمود ن م
مخروطی کے راس ا ' اَ مخروطی کا مرکز ج
مرکز دار مخروطی کا مزدوج محور ب ب
مندرجۂ بالا ترقیم کے علاوہ جہاں کہیں خاص نقطوں کو تعبیر کرنے کے لیے مخصوص حروف استعمال کیے جائینگے اُن کی تشریح وقتاً فوقتاً کی جائیگی ۔

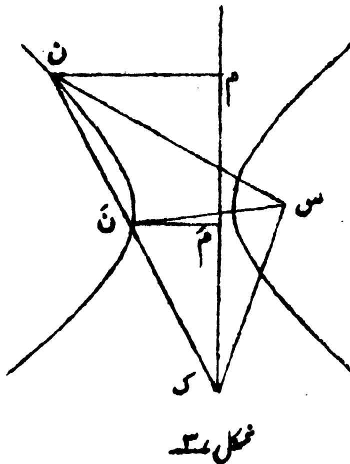
۱۱ - مسئلہ۔ اگر مخروطی پر کے دو نقطوں ن ' نَ کو ملانے والا خط ایک مرتب سے ک پر ملے اور اس مرتب کے جواب کا ماسکہ س ہو تو س ک خطوط س ن ' س نَ کے درمیانی زاویوں میں سے کسی ایک کا ناصف ہوگا۔



شکل ۲



شکل ۱



شکل ۳

ن اور نَ سے مرتب پر عمود ن م اور نَ مَ نکالو۔

$\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{س نَ}}{\text{نَ مَ}}$ کیونکہ ہر ایک نسبت مخروطی کے خروج المرکز کے مساوی ہے

$\therefore \frac{\text{س ن}}{\text{س نَ}} = \frac{\text{ن م}}{\text{نَ مَ}} = \frac{\text{ن ک}}{\text{نَ ک}}$ (کیونکہ مثلثات ن م ک، نَ مَ ک متشابہ ہیں)

اس لیے اشکال (۱) اور (۳) میں جہاں دونوں نقطے ن اور نَ مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہیں خط س ک، ∠ ن س نَ کی خارجی تنصیف کرتا ہے اور شکل ۲ میں جہاں نقاط ن اور نَ مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہیں خط س ک، ∠ ن س نَ کی داخلی تنصیف کرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن ک، ∠ ن س نَ کا خارجی ناصف ہے جبکہ نقاط ن اور نَ مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور داخلی ناصف ہے جبکہ ن، نَ مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہوں۔

فرع ۔ ایک خطِ مستقیم مخروطی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرسکتا۔
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک خط مخروطی کو نقاط ن، نَ، نً پر قطع کرتا ہے
فرض کرو کہ یہ خط ماسکہ س کے متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے
تب مسئلۂ بالا کی رُو سے س ک تینوں خطوط س ن، س نَ اور س نً سے مساوی زاویے بناتا ہے اور یہ ناممکن ہے۔ (اگر مخروطی زائد ہو تو طالب علم خود مختلف صورتوں کے لیے مناسب شکلیں کھینچے)۔

امثلہ ۲

(۱) مخروطی کا ایک ماسکہ اور مخروطی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دیے ہوئے ماسکہ کے جواب کا مرتب دو ثابت نقطوں میں سے ایک نہ ایک میں سے گزرتا ہے۔

(۲) مخروطی کا ایک ماسکہ اور مخروطی پر کے تین نقطے معلوم ہیں، مخروطی کا

مرتب معلوم کرو۔ بتاؤ کہ اس سوال کے چار حل ہیں جن میں کم از کم تین حلوں کے جواب میں مخروطی زائد ہے۔

(۳) مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرنے والے کوئی دو وتر ن س نَ اور ق س قَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق اور نَ قَ کا نقطۂ تقاطع ماسکہ س کے جواب کے مرتب پر ہے۔

(۴) مخروطی کا ایک ماسکہ، مخروطی پر کے دو نقطے اور مخروطی کے قاطع محور کی سمت معلوم ہیں مخروطی کا مرتب دریافت کرو۔

(۵) مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرنے والا کوئی وتر ن نَ ہے اور ق مخروطی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، اگر ن ق اور نَ ق ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے بالترتیب ک اور کَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ $\angle$ک س کَ قائمہ ہے۔

(۶) ن س نَ مخروطی کا کوئی وتر ہے جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور مخروطی کا ایک راس ا ہے، ن ا اور نَ ا ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے بالترتیب ک اور کَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ک لا × لا کَ = لا سٓ جہاں لا قاطع محور اور مرتب کا نقطۂ تقاطع ہے۔

(۷) مخروطی کا ماسکہ معلوم کرو جبکہ مرتب، ایک راس اور مخروطی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔

(۸) اگر مخروطی کا ایک ماسکہ، ایک راس اور مخروطی پر کا ایک اور نقطہ معلوم ہوں تو دیے ہوئے ماسکہ کے جواب کا مرتب معلوم کرو۔

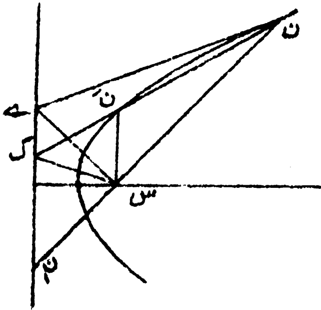
(۹) ن نَ مرکز دار مخروطی کا کوئی قطر ہے اور مخروطی کا ایک ماسکہ س ہے۔ ثابت کرو کہ ناقص کی صورت میں س ن + س نَ مستقل ہے اور زائد کی صورت میں س ن اور س نَ کا فرق مستقل ہے۔

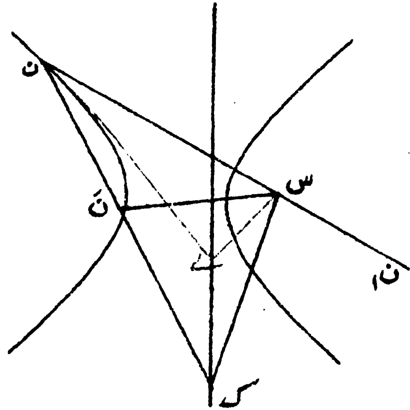
۱۲- تعریفات - اگر ایک منحنی پر ن اور نَ دو نقطے ہوں تو وتر ن نَ کے انتہائی مقام کو، جبکہ نَ منحنی پر حرکت کرکے نقطہ ن کے نہایت قریب آ جاتا ہے (اور بالآخر پر منطبق ہو جاتا ہے) نقطہ ن پر منحنی کا **مماس** کہتے ہیں اور نقطہ ن مماس کا **نقطۂ تماس** کہلاتا ہے،

نیز وہ خط جو ن میں سے گزرتا ہے اور ن پر کے مماس پر عمود ہے ن پر منحنی کا عماد کہلاتا ہے۔

ترقیم۔ منحنی کے کسی نقطہ ن پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطۂ تقاطع عموماً گ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۱۳۔ مسئلہ:۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ایک مرتب سے ے پر ملے اور اس مرتب کے جواب کا ماسکہ س ہو تو > ن س ے قائمہ ہوگا۔





شکل ۱　　　شکل ۲

فرض کرو کہ مخروطی پر ن کے قریب ایک اور نقطہ نَ ہے۔ اور خطِ مستقیم ن نَ ممدودہ مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

ن س کو ن۱ تک خارج کرو، تب دفعہ ۱۱ کی رُو سے س ک > نَ س ن۱ کا خارجی ناصف ہوگا کیونکہ ن، نَ مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہیں۔

جیسے جیسے نَ، ن کے قریب آتا جاتا ہے، ک، ے کے قریب

آتا جاتا ہے اور ∠ نَ س ن دو قائموں کے قریب آتا جاتا ہے۔ اس لیے بالآخر جب نَ، ن پر منطبق ہو جائے تو ∠ ے س ن = ½ × ۲ قائمے = قائمہ اس لیے ∠ ن س ے بھی قائمہ ہے۔

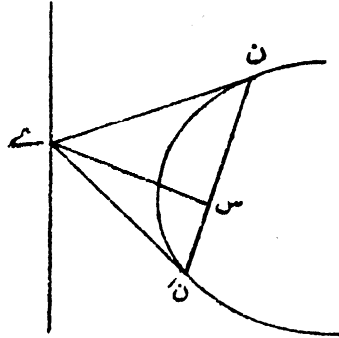
عکس - اگر مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ماسکہ س سے س ن پر عمود س ے کھینچا جائے جو س کے جواب کے مرتب سے ے پر ملے تو ن ے مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس ہو گا۔

اگر ن ے مخروطی کا مماس نہیں ہے تو فرض کرو کہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے تب ∠ ن س ے قائمہ ہے، نیز بموجب مفروض ∠ ن س ے بھی قائمہ ہے، اس لیے خط س ے منطبق ہے س ے پر یعنی نقاط ے اور ے ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے ن ے مخروطی کا مماس ہے۔

نوٹ - اگر مخروطی کا ایک ماسکہ اور اس کے جواب کا مرتب معلوم ہو تو مسئلۂ بالا کے عکس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کا مماس کھینچ سکتا ہے۔

۱۴ - تعریف - مخروطی کے ماسکہ میں سے گزرنے والا کوئی وتر ماسکی وتر کہلاتا ہے۔

مسئلہ۔ مخروطی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو متناظر مرتب پر قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س نَ مخروطی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔ ماسکہ س سے ایک خط س ے کھینچو جو ن نَ پر عمود ہو اور ماسکہ س کے متناظر مرتب سے ے پر ملے، تب دفعہ ۱۴ کے مسئلہ کے عکس کی رُو سے دونوں خط ن ے اور نَ ے مخروطی کے مماس ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ ماسکی وتر ن س نَ کے سروں ن، نَ پر کے مماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

عکس۔ اگر مخروطی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو نقاطِ تماس کو ملانے والا خط متناظر ماسکہ میں سے گزریگا۔

فرض کرو کہ مرتب پر کے کسی نقطہ ے سے مخروطی کے مماس ے ن اور ے نَ ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ن س نَ خطِ مستقیم ہے۔

چونکہ ن ے مخروطی کا مماس ہے اس لیے زاویہ ن س ے قائمہ ہے، اسی طرح سے زاویہ نَ س ے بھی قائمہ ہے۔ اِس لیے متصلہ زاویوں ن س ے اور نَ س ے کا مجموعہ دو قائمے ہے اس لیے ن س نَ خطِ مستقیم ہے۔

۱۵۔ مسئلہ۔ اگر مخروطی کے نقطہ ن پر کے مماس پر کوئی

نقطہ ت لیا جائے اور ت سے ن کے ماسکی فاصلہ س ن پر عمود ت د اور ت سے متناظر مرتب پر عمود ت ھ نکالے جائیں تو $\frac{\text{س د}}{\text{ت ھ}}$ = ز

فرض کرو کہ مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے۔
ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔
چونکہ ∠ ن س ے قائمہ ہے اور ازروئے عمل ∠ ن د ت بھی قائمہ ہے اس لیے س ے ∥ د ت

اس لیے $\frac{\text{س د}}{\text{س ن}} = \frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}}$ .... (۱)

لیکن متشابہ مثلثات ے ت ھ اور ے ن م میں

$\frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}} = \frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}}$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{س د}}{\text{س ن}} = \frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}}$

یعنی $\frac{\text{س د}}{\text{ت ھ}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}}$ = ز

نوٹ۔ مخروطی کی یہ خاصیت "آڈمس" (Adams) نے دریافت کی تھی۔

۱۶ ۔ مسئلہ ۔ اگر کسی نقطہ ق سے مخروطی کے ایک مرتب پر عمود ق ھ نکالا جائے اور اس مرتب کے جواب کا ماسکہ س ہو تو $\frac{\text{س ق}}{\text{ق ھ}}$ بڑا ہوگا یا چھوٹا ہوگا خروج المرکز ز سے بموجب اس کے کہ نقطہ ق مخروطی کے باہر ہو یا اندر ہو۔

نقطہ ق مخروطی کے باہر ہوگا اگر محدود خط س ق مخروطی کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر (جو س اور ق کے درمیان ہو) قطع کرے ورنہ اندر ہوگا۔
فرض کرو کہ مخروطی کے باہر ایک نقطہ ق ہے۔

صورت اول ۔ فرض کرو کہ س اور ق مرتب کی ایک ہی جانب ہیں فرض کرو کہ س ق مخروطی کو ن پر قطع کرتا ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو، س ھ کو ملاؤ تب س ھ، ن م کو ن اور م کے درمیانی نقطہ ع پر قطع کریگا۔

چونکہ ن ع متوازی ہے ق ھ کے

اس لیے $\frac{\text{س ق}}{\text{ق ھ}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}}$

لیکن $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} < \frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}}$ (کیونکہ ن ع چھوٹا ہے ن م سے)

$\therefore$ $\text{ز} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} < \frac{\text{س ق}}{\text{ق ھ}}$

پس ثابت ہوا کہ اگر ق بیرونی نقطہ ہو تو $\frac{\text{س ق}}{\text{ق ھ}} > \text{ز}$

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ س اور ق مرتب کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔
فرض کرو کہ محدود خط س ق مخروطی کو نقطہ ن پر اور س ق
محدودہ مخروطی کو نَ پر قطع کرتا ہے ۔
نَ سے مرتب پر عمود نَ مَ نکالو اور فرض کرو کہ ھ س محدودہ نَ مَ
کو نَ اور مَ کے درمیانی نقطہ عَ پر قطع کرتا ہے ۔

تب متشابہ مثلثات سے

$$\frac{\text{س ق}}{\text{ق ھ}} = \frac{\text{س نَ}}{\text{نَ عَ}}$$

اور چونکہ $\frac{\text{س نَ}}{\text{نَ عَ}} > \frac{\text{س نَ}}{\text{نَ مَ}} = \text{ز}$

اس لیے $\frac{س ق}{ق ھ} > ز$

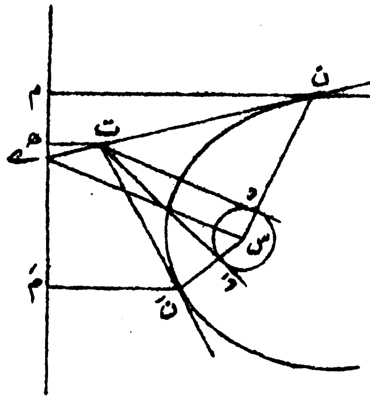
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر نقطہ ق مخروطی کے اندر

ہو تو $\frac{س ق}{ق ھ} < ز$

۱۷۔ مسئلہ عملی۔ کسی بیرونی نقطہ سے مخروطی کے مماسات کھینچنا۔

فرض کرو کہ ت ایک دیا ہوا بیرونی نقطہ ہے جس سے مخروطی کے مماس کھینچنا مطلوب ہے۔

تحلیل:۔ فرض کرو کہ ت سے مخروطی کے مماس ت ن اور ت نَ ہیں۔فرض کرو کہ مخروطی کا ماسکہ س ہے اور متناظر مرتب م مَ ہے۔



ت سے مرتب پر عمود ت ھ اور س ن، س نَ پر بالترتیب عمود ت د، ت دَ نکالو تب دفعہ ۱۵ کی رو سے

$$\frac{س د}{ت ھ} = ز \quad اور \quad \frac{س دَ}{ت ھ} = ز$$

اس لیے $س د = س دَ = ز \times ت ھ$۔

چونکہ ز اور ت ھ دونوں معلوم ہیں اس لیے س د معلوم ہو سکتا ہے۔
چونکہ د اور دَ پر کے زاویے قائمے ہیں اس لیے ت د اور ت دَ مماسات ہیں اُس دائرہ کے جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر س د ہے جہاں
س د = ز × ت ھ۔
پس تحلیلِ بالا کی بنا پر بیرونی نقطہ سے مخروطی کے دو مماس کھینچنے کا حسبِ ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔

ترکیب ۔ دیے ہوئے نقطہ ت سے مخروطی کے مرتب پر عمود ت ھ نکالو اور متناظر ماسکہ س کو مرکز مان کر ز × ت ھ کی دُوری پر دائرہ کھینچو۔ دفعہ ۱۶ کی رُو سے ظاہر ہے کہ نقطہ ت اس دائرہ کے باہر ہوگا۔
ت سے اس دائرہ کے مماس ت د اور ت دَ کھینچو۔
س د اور مخروطی کا نقطۂ تقاطع ن اور س دَ اور مخروطی کا نقطۂ تقاطع نَ معلوم کرو۔ تب ت ن اور ت نَ مخروطی کے مطلوبہ مماس ہونگے۔
فرض کرو کہ ن ت مرتب سے ے پر ملتا ہے، س ے کو ملاؤ۔
متشابہ مثلثات ے ت ھ اور ے ن م سے

$$\frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}} = \frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

چونکہ ن مخروطی پر کا نقطہ ہے اس لیے $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \text{ز} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

نیز بموجب عمل دائرہ (س) کا نصف قطر س د = ز × ت ھ (۳)

اب (۲) اور (۳) سے $\frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}} = \frac{\text{س د}}{\text{ز}} \div \frac{\text{س ن}}{\text{ز}} = \frac{\text{س د}}{\text{س ن}} \quad \ldots (4)$

(۱) اور (۴) سے $\frac{\text{س د}}{\text{س ن}} = \frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}}$

اس لیے س ے ∥ د ت
چونکہ ∠ س د ت قائمہ ہے اس لیے ∠ د س ے بھی

قائمہ ہے یعنی ∠ ن س ے قائمہ ہے۔

اس لیے ن ے مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس ہے اور یہ مماس از روئے عمل دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت میں سے گزرتا ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ت نَ بھی مخروطی کا مماس ہے پس دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے مخروطی کے دو مماس ت ن اور ت نَ ہیں۔

نوٹ:۔ اگر دیا ہوا نقطہ ت مخروطی کے اندر ہو تو دفعہ ۱۶ کی رُو سے

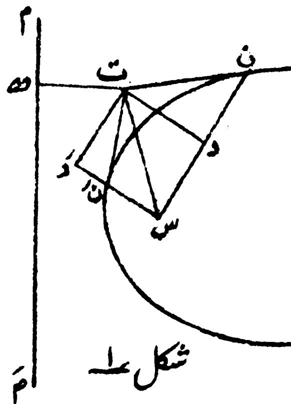
$$\frac{\text{س ت}}{\text{ت ھ}} < \text{ز} \quad \text{یعنی} \quad \text{س ت} < \text{ز} \times \text{ت ھ}$$

اس لیے نقطہ ت اُس دائرہ کے اندر واقع ہوگا جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر ز × ت ھ ہے۔

اس لیے ت سے دائرہ (س) کے مماس نہیں کھینچے جاسکتے۔

اس لیے اندرونی نقطہ ت سے مخروطی کے مماس نہیں کھنچ سکتے۔

۱۸۔ اگر کسی نقطہ ت سے مخروطی کے مماس ت ن، ت نَ ہوں تو ت ن اور ت نَ کے محاذی ماسکہ س پر مساوی یا مکمل زاویے بنتے ہیں۔



شکل ۱۷

ت سے مرتب پر عمود ت ھ نکالو۔

ت سے س ن اور س نَ پر عمود ت د اور ت دَ نکالو۔
تب دفعہ ۵ا کی رُو سے س د = ز × ت ھ اور س دَ = ز × ت ھ
یعنی س د = س دَ
اب مثلثات ت س د اور ت س دَ میں
< ت د س = < ت دَ س (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
ضلع س د = ضلع س دَ اور وتر س ت دونوں مثلثات میں مشترک ہے
اس لیے مثلث ت س د ≡ مثلث ت س دَ
اس لیے اگر نقاطِ تماس ن اور نَ مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں (دیکھو شکل بالا)
تو < ت س ن = < ت س نَ
اور اگر نقاطِ تماس ن اور نَ مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہوں
(دیکھو شکل ۲ ذیل)
تو < ت س د + < ت س ن = دو قائمے

شکل ۲

لیکن < ت س دَ = < ت س د

اس لیے ∠ ت س نَ + ∠ ت س ن = دو قائمے

یعنی زاویے ت س ن اور ت س نَ ایک دوسرے کے تکمل ہیں۔

اُس صورت میں جبکہ دونوں نقاطِ تماس ن اور نَ زائد کی اُس شاخ پر واقع ہوں جس کے اندر ماسکہ س نہیں ہے مناسب شکل کھینچ کر بہ آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ∠ ت س ن = ∠ ت س نَ

پس ثابت ہوا کہ بیرونی نقطہ ت سے کھینچے ہوئے مماسات کے محاذی ماسکہ س پر مساوی زاویے بنتے ہیں جبکہ دونوں نقاطِ تماس مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور تکمیل زاویے بنتے ہیں جبکہ نقاطِ تماس مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر واقع ہوں۔

فرع - اگر مخروطی کے دو نقطوں ن اور نَ پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ت ہو اور وتر ن نَ مخروطی کے ایک مرتب سے ک پر ملے تو ت ک کے محاذی متناظر ماسکہ س پر زاویۂ قائمہ بنتا ہے۔

دفعات ۱۱ اور ۱۸ سے ظاہر ہے کہ س ک، س ت زاویہ ن س نَ کے منصف ہیں اس لیے س ک اور س ت کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے۔

امثلہ ۳

(۱) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا مماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ متناظر ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۲) مخروطی کا ایک ماسکہ، مخروطی پر کے دو نقطے اور اِن نقطوں میں سے ایک نقطہ پر کا مماس دیے گئے ہیں۔ متناظر مرتب معلوم کرو۔

(۳) مخروطی کا ایک مرتب، مخروطی پر کے دو نقطے اور اِن نقطوں میں سے ایک پر کا مماس دیے گئے ہیں، متناظر ماسکہ معلوم کرو۔

(۴) مخروطی کھینچو جبکہ مخروطی کا ایک ماسکہ، خروج المرکز اور مخروطی کے دیے ہوئے نقطہ پر کا مماس معلوم ہیں۔

(۵) مخروطی کا کوئی مماس ماسکہ س میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے مماسوں سے ف، ف۱ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ف۱ کے محاذی مخروطی کے ماسکہ س پر زاویۂ قائمہ بنتا ہے۔

(۶) مخروطی کا کوئی مماس مخروطی کے دو ثابت مماسوں سے نقاط ف، ف۱ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ف ف۱ کے محاذی ماسکہ پر مستقل زاویہ بنتا ہے۔

(۷) ایک ذوارلعبۃ الاضلاع کے ضلعے ناقص کو مس کرتے رہیں ثابت کرو ذوارلعبۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کے کسی جوڑے کے محاذی ماسکہ پر تکمیلی زاویے بنتے ہیں۔

۱۹- اگر مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملے تو

س گ = ز × س ن

فرض کرو کہ مخروطی کے نقطہ ن پر کا مماس ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے نقطہ ے پر ملتا ہے ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔ س ے، س م کو ملاؤ۔

چونکہ ∠ ن س ے = قائمہ = ∠ ن م ے

اس لیے نقاط س، ن، م، ے اُس دائرہ پر ہیں جس کا قطر ن ے ہے

نیز چونکہ ∠ ے ن گ قائمہ ہے اس لیے ن گ اس دائرہ کا مماس ہے۔

∴ ∠ گ ن س = ∠ س م ن

اور چونکہ س گ متوازی ہے ن م کے

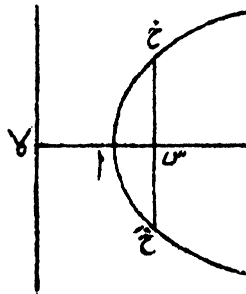
∴ ∠ گ س ن = ∠ س ن م

∴ مثلثات گ ن س اور س م ن متشابہ ہیں

$$\therefore \quad \frac{\text{س گ}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \text{ز}$$

$$\therefore \quad \text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

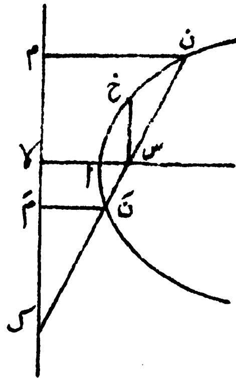
۲۰ — تعریف:- اگر مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرنے والا ماسکی وتر خ س خَ قاطع محور پر عمود وار ہو تو خ خَ کو مخروطی کا وترِ خاص کہتے ہیں - اور نیم وترِ خاص س خ کے طول کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔



مسئلہ - اگر مخروطی کے ماسکی وتر ن س نَ کے سرے مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں تو

$$(1) \quad \frac{1}{\text{س ن}} + \frac{1}{\text{س نَ}} = \frac{2}{\text{ل}}$$

اور (۲) $\text{س ن} \times \text{س نَ} = \frac{1}{2}\,\text{ل} \times \text{ن نَ}$



فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س نَ ممدودہ متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے ن م اور نَ مَ متناظر مرتب پر عمود نکالو۔

(۱) $\frac{\text{س ن}}{\text{س نَ}} = \frac{\text{ز} \times \text{ن م}}{\text{ز} \times \text{نَ مَ}}$ (بموجب تعریفِ مخروطی)

$= \frac{\text{ن م}}{\text{نَ مَ}} = \frac{\text{ک ن}}{\text{ک نَ}}$ (متشابہ مثلثات سے)

اس لیے ن نَ کی داخلی تقسیم س پر اور خارجی تقسیم ک پر ایک ہی نسبت میں ہوتی ہے ۔ یعنی ن نَ کی موسیقی تقسیم س اور ک پر ہوتی ہے ۔

اس لیے ک س کی موسیقی تقسیم نَ اور ن پر ہوتی ہے۔

اس لیے ک نَ، ک س، ک ن موسیقی سلسلہ میں ہیں ۔

اس لیے تناسب سے نَ مَ، س لا اور ن م موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

∴ ز × نَ مَ، ز × س لا، ز × ن م بھی موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

∴ س نَ، س خ، س ن موسیقی سلسلہ میں ہیں ۔

$$\therefore \frac{1}{\text{س نَ}} + \frac{1}{\text{س ن}} = \frac{2}{\text{س خ}} = \frac{2}{\text{ل}}$$

$$(۲)\quad \frac{۱}{\text{س ن}} + \frac{۱}{\text{س نَ}} = \frac{\text{س نَ} + \text{س ن}}{\text{س ن} \times \text{س نَ}} = \frac{\text{ن نَ}}{\text{س ن} \times \text{س نَ}}$$

لیکن (۱) کی رُو سے

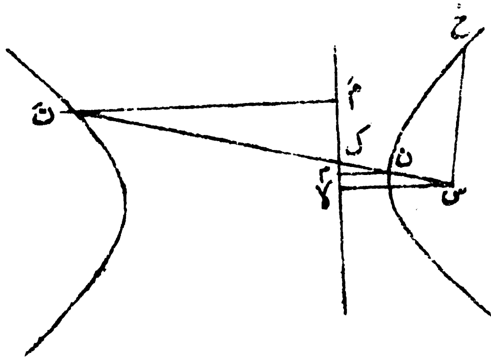
$$\frac{۱}{\text{س ن}} + \frac{۱}{\text{س نَ}} = \frac{۲}{\text{ل}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ن نَ}}{\text{س ن} \times \text{س نَ}} = \frac{۲}{\text{ل}}$$

یعنی

$$\text{س ن} \times \text{س نَ} = \frac{\text{ل}}{۲} \times \text{ن نَ}$$

نوٹ — اگر زائد کی صورت میں ماسکی وتر کے سرے ن اور نَ مختلف شاخوں پر ہوں (دیکھو شکل ذیل)



تو (۱)

$$\frac{۱}{\text{س ن}} - \frac{۱}{\text{س نَ}} = \frac{۲}{\text{ل}}$$

اور (۲)

$$\text{س ن} \times \text{س نَ} = \frac{۱}{۲}\,\text{ل} \times \text{ن نَ}$$

حسب سابق ثابت کیا جا سکتا ہے کہ س ک کی موسیقی تقسیم ن، نَ پر ہوتی ہے۔

اس لیے دی ہوئی شکل کی مدد سے مطلوبہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

امثلہ

(۱) دفعہ ۱۹ کی شکل میں اگر گ سے ن س پر عمود گ ع نکالا جائے تو ثابت کرو کہ گ ع = ز × م لا نیز ثابت کرو کہ ن ع نیم وترِ خاص کے مساوی ہے۔

(۲) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر س گ = ن گ تو ثابت کرو کہ س ن = ۲ س خ

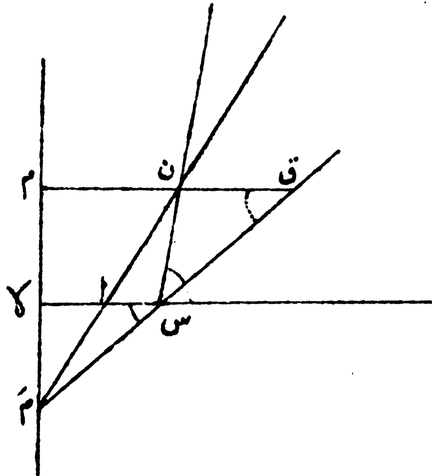
(۳) مخروطی کا ایک ماسکی وتر ن س نَ متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ک ن اور ک نَ کا موسیقی اوسط ک س ہے۔

(۴) ناقص یا زائد پر کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے نقطہ گ پر ملتا ہے اور مخروطی کے ماسکے س اور سَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ن گ زاویہ س ن سَ کا ایک ناصف ہے۔

[اشارہ۔ بموجب دفعہ ۱۹ س گ = ز × س ن اور سَ گ = ز × سَ ن

∴ س گ : سَ گ = س ن : سَ ن]

(۵) مخروطی کا ماسکہ س، مرتب م مَ اور راس ا معلوم ہیں، مخروطی پر کے نقطے معلوم کرنے کے لیے ذیل کے طریقہ کا ثبوت دو۔



مرتب پر کوئی نقطہ م لو، مَ س اور مَ ا کو ملاؤ اور ان خطوط کو خارج کرو۔ س میں سے ایک خط س ن ایسا کھینچو جو مَ س کے ساتھ ∠ لاس مَ کے مساوی زاویہ بنائے اور فرض کرو کہ یہ خط مَ ا ممدودہ سے ن پر ملتا ہے، تب نقطہ ن مخروطی پر ہوگا۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو اور فرض کرو کہ م ن ممدودہ مَ س ممدودہ سے ق پر ملتا ہے۔

متوازی خطوط ق م، س لا سے حاصل ہوتا ہے

∠ لاس مَ = ∠ ن ق س

لیکن بموجب عمل ∠ لاس مَ = ∠ ن س ق

∴ ∠ ن ق س = ∠ ن س ق

∴ ن ق = ن س .... (۱)

نیز متشابہ مثلثات سے، $\frac{\text{ن ق}}{\text{ا س}} = \frac{\text{مَ ن}}{\text{مَ ا}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ا لا}}$

اس لیے (۱) کی مدد سے $\frac{\text{س ن}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ا لا}}$

یعنی $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ا س}}{\text{ا لا}} = \text{ز}$

یعنی ن مخروطی پر کا نقطہ ہے۔

(۶) مخروطی کے کسی نقطہ نَ پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے اور وترِ خاص سے ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{س ع}}{\text{س ے}} = \text{ز}$

(۷) مخروطی کا کوئی وتر ن نَ ایک مرتب سے ک پر ملتا ہے اور ک میں سے مخروطی کا ایک مماس ک ت کھینچا گیا ہے۔ ت کو دیے ہوئے مرتب کے جواب کے ماسکہ س سے ملانے والا خط وتر ن نَ سے ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن نَ کی موسیقی تقسیم ع اور ک پر ہوتی ہے۔

(۸) ایک مخروطی کا خروج المرکز ز اور مخروطی پر کا ایک ثابت نقطہ

ن اور ن پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطۂ تقاطع گ معلوم ہیں ۔ مخروطی کے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

(۹) اگر مخروطی کے دو وتر ن ف اور نَ ق مرتب سے ک اور کَ پر ملیں اور متناظر ماسکہ س ہو تو ثابت کرو کہ ∠ ک س کَ ، ∠ ن س نَ کے نصف کے مساوی ہے یا نصف کا مکمل۔

(۱۰) مخروطی پر کے دو نقطے مخروطی کا ماسکہ اور خروج المرکز معلوم ہیں مخروطی کے محور کا مقام معلوم کرو۔

(۱۱) اگر وترِ خاص کے ایک سرے خ پر کا مماس راس ا پر کے مماس سے ت پر ملے تو ثابت کرو کہ ا ت = ا س

(۱۲) مخروطی کا ایک ثابت نقطہ ن ہے اور ایک نقطہ ت سے ماسکی فاصلہ س ن پر عمود ت د اور متناظر مرتب پر عمود ت ھ نکالے گئے ہیں ۔ اگر $\frac{س د}{ت ھ}$ = ز تو ثابت کرو کہ ت کا طریق نقطہ ن پر کا مماس ہے۔

(۱۳) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے اور وترِ خاص ممدودہ سے ت پر، ثابت کرو کہ $\frac{س ت}{س ے}$ = ز اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر مخروطی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس وترِ خاص ممدودہ سے ت اور تَ پر ملیں تو س ت = س تَ ہے

(۱۴) مخروطی کے مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ ک سے ایک خط کھینچا گیا جو مخروطی کو ن اور نَ پر قطع کرتا ہے اور ن اور نَ پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ت ہے ، ثابت کرو کہ ت کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو متناظر ماسکہ س میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط پر کوئی نقطہ ت ہے ، ثابت کرو کہ ت سے کھینچے ہوئے مماسات کا وترِ تماس مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

(۱۶) مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے اور گ سے س ن پر عمود گ ط ہے ۔ ثابت کرو کہ ن ط نیم وترِ خاص کے

مساوی ہے ۔

(۱۷) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز گ اور نصف قطر گ ن ہے س ن میں سے ایک مستقل طول والا وتر قطع کرتا ہے ۔

(۱۸) مخروطی کے ماسکہ س سے مخروطی کے کسی مماس پر عمود س ما نکالا گیا ہے اور متناظر مرتب پر عمود س لا ہے ثابت کرو کہ $\frac{\text{س ما}}{\text{لا ما}}$ = ز اور اس کی مدد سے ما کا طریق معلوم کرو ۔

مکافی کی صورت میں یہ طریق کیا ہوگا ۔

[اشارہ ۔ فرض کرو کہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو ۔ تب ∠ س ما لا = ∠ س ے لا = ∠ س ن م

اور ∠ س لا ما = ∠ س ے ما = ∠ س م ن

اس لیے مثلثات س لا ما اور س م ن متشابہ ہیں ۔

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{س ما}}{\text{لا ما}} = \frac{\text{س ن}}{\text{م ن}} = \text{ز}\ ]$$

(۱۹) مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے اور ن سے مرتب پر عمود ن م ہے ۔ ثابت کرو کہ ن گ = ز × س م جہاں س متناظر ماسکہ ہے ۔ اس نتیجہ کی مدد سے مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر کا عماد کھینچو ۔

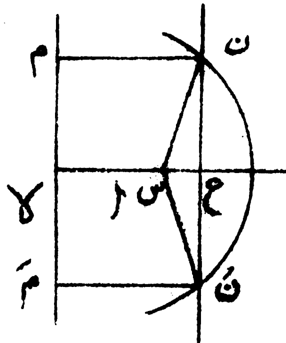
(۲۰) دو مخروطیوں کا ایک ماسکہ س مشترک ہے ۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کا مشترک وتر س کے جواب کے مرتبوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے ۔

(۲۱) ایک مخروطی کا ماسکہ، مرتب اور خروج المرکز معلوم ہیں مخروطی کا وہ مماس کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے ۔

دوسرا باب
مکافی

۲۱۔ تعریفات ـــــــ س ایک ثابت نقطہ اور م مَ ایک ثابت خطِ مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ ن س، خطِ مستقیم م مَ سے ن کے عمودی فاصلہ ن م کے مساوی ہو تو ن کے طریق کو مکافی کہتے ہیں۔ ثابت نقطہ س کو مکافی کا ماسکہ کہتے ہیں۔ ثابت خطِ مستقیم م مَ کو مکافی کا مرتب کہتے ہیں۔

۲۲۔ مسئلہ۔ اگر مکافی کا ماسکہ س اور مرتب م مَ معلوم ہوں تو مکافی کو مرتسم کرنا یعنی مکافی پر کے متعدد نقطے معلوم کرنا۔



ماسکہ س سے مرتب م مَ پر عمود س لا نکالو، س لا کا وسطی نقطہ ا

معلوم کرو۔

چونکہ ا س = ا لا اس لیے بموجب تعریف نقطہ ا مکافی پر کا نقطہ ہے
لا س پر کے کسی نقطہ ع سے مرتب کے متوازی خط ن ع نَ کھینچو۔ س کو مرکز مان کر ع لا نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو ن ع نَ کو ن اور نَ پر قطع کرے۔ تب ن اور نَ مکافی پر کے نقطے ہونگے۔

ن اور نَ سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور نَ مَ نکالو۔

چونکہ ن س = ع لا = ن م اس لیے ن مکافی پر کا ایک نقطہ ہے۔
اسی طرح نَ بھی مکافی پر کا ایک نقطہ ہے۔

ظاہر ہے کہ دائرہ (س) خط ن ع نَ کو صرف اُسی صورت میں قطع کریگا جبکہ دائرہ کا نصف قطر س ن بڑا ہو س ع سے یعنی جبکہ ع لا بڑا ہو س ع سے اور یہ صرف اُسی صورت میں ممکن ہوگا جبکہ نقطہ ع نقطہ ا سے اُسی طرف واقع ہو جس طرف ماسکہ س واقع ہے۔

لا س پر ع کے مختلف مقامات لے کر اسی عمل سے مکافی پر کے دیگر متعدد نقطے معلوم ہوسکتے ہیں اور مکافی مرتسم ہوسکتا ہے۔ عمل بالا سے ضمناً یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہر خط جو مرتب کے متوازی ہے اور ا کے اُسی جانب واقع ہے جس جانب ماسکہ س واقع ہے مکافی کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے اس لیے مکافی لامحدود فاصلہ تک ایک طرف پھیلتا ہے اور کلیتہً راس ا کی اُسی جانب واقع ہے جس جانب ماسکہ س ہے۔

۲۳۔ چونکہ متساوی الساقین مثلث س ن نَ کے قاعدہ ن نَ پر س ع عمود ہے۔ اس لیے ن نَ کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکافی کے ہر ایسے وتر ن نَ کی جو مرتب کے متوازی ہے خط لا س (ممدودہ بشرط ضرورت) عمودی تنصیف کرتا ہے۔

تعریفات ۔ اگر ایک منحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ منحنی کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود وار ہو تنصیف کرتا ہو تو منحنی بلحاظ خطِ مذکور کے **متشاکل** کہلاتا ہے، خطِ مذکور منحنی کا **محور** کہلاتا ہے۔

پس ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا۔

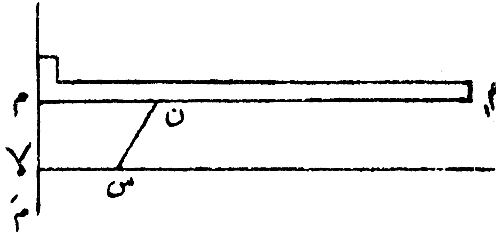
مکافی بلحاظ خط س لا کے جو ماسکہ میں سے مرتب پر عمود وار کھینچا گیا ہے متشاکل ہے یعنی خط لا س ممدودہ مکافی کا محور ہے۔

تعریف ۔ محور اور منحنی کے نقطۂ تقاطع کو راس کہتے ہیں۔

پس شکل میں س لا کا وسطی نقطہ ا مکافی کا راس ہے۔

۲۴۔ مکافی کو عملی طور پر ذیل کے طریقہ سے مرتسم کیا جا سکتا ہے:۔

فرض کرو کہ مکافی کا ماسکہ س اور مرتب م مَ دیے گئے ہیں۔



ایک سلاخ م م۱ کے ایک سرے م۱ کے ساتھ ایک بے لچک ڈوری کا ایک سرا باندھا گیا ہے جس کا طول م م۱ کے مساوی ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا ماسکہ س کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ اب سلاخ کو اس طرح پھسلایا جاتا ہے کہ اس کا سرا م مرتب پر رہتا ہے اور سلاخ ہمیشہ مرتب پر عمود وار رہتی ہے۔ ڈوری کو ایک پنسل کی نوک کے ذریعہ جو ہمیشہ سلاخ کو مس کرتی ہے تنا ہوا رکھا جاتا ہے تب پنسل کی نوک مکافی کو مرتسم کریگی جس کا ماسکہ س اور مرتب م مَ ہے۔

کیونکہ س ن + ن م۱ = م م۱ = م ن + ن م۱

∴ س ن = ن م

۵۴ - **تعریفات** - ماسکہ س میں سے گزرنے والے کسی وتر ن س نَ کو ماسکی وتر کہتے ہیں - اور ماسکہ س سے منحنی پر کے کسی نقطہ ن کے فاصلہ ن س کو ن کا ماسکی فاصلہ کہتے ہیں -

وہ ماسکی وتر جو محور پر عمود ہو وترِ خاص کہلاتا ہے اور اس کے سروں کو بالعموم خ، خَ سے تعبیر کیا جاتا ہے - س خ کو نیم وترِ خاص کہتے ہیں اور اِس کے طول کو بالعموم ل سے تعبیر کرتے ہیں -

اگر منحنی کے کسی نقطہ ن سے محور پر عمود ن ع ہو تو ن ع کو نقطہ ن کا معیّن کہتے ہیں اور معیّن کے پائین ع اور راس ا کے درمیانی فاصلہ ا ع کو ن کا فصلہ کہتے ہیں -

مسئلہ - مکافی کا وترِ خاص خ خَ = ۴ ا س

وترِ خاص کے سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو -

تب بموجب تعریف س خ = خ م

= لا س = ۲ ا س

چونکہ مکافی بلحاظ محور لا س کے تشاکل ہے

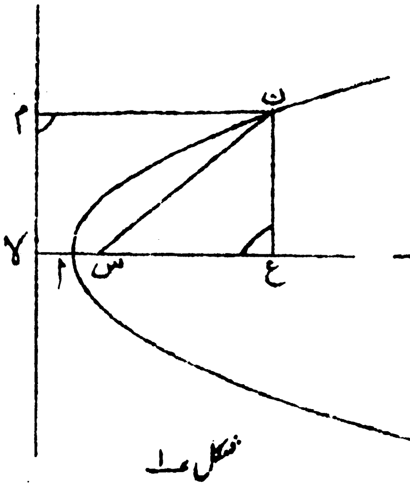
اس لیے خ خَ = ۲ س خ

∴ خ خَ = ۴ ا س

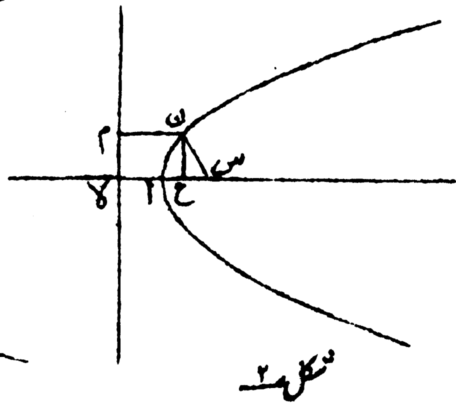
۲۶ ۔ مسئلہ ۔ اگر مکافی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہو تو

ن ع^۲ = ۴ ا س × ا ع

ن س کو ملاؤ اور ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو



شکل ۱



شکل ۲

چونکہ س ن = ن م

اس لیے س ن^۲ = ن م^۲ = لا ع^۲ ....(۱)

اور س ن^۲ = ن ع^۲ + س ع^۲ ....(۲)

اس لیے (۱) اور (۲) سے ن ع^۲ = لا ع^۲ ۔ س ع^۲

= (لا ع ۔ س ع) (لا ع + س ع)

اب شکل ۱ میں لا ع ۔ س ع = لا س = ۲ ا س

اور لا ع + س ع = لا س + س ع + س ع

= ۲ ا س + ۲ س ع

= ۲ ا ع

اور شکل ۲ میں (لا ع ۔ س ع) = لا س ۔ س ع ۔ س ع

= ۲ ا س ۔ ۲ س ع

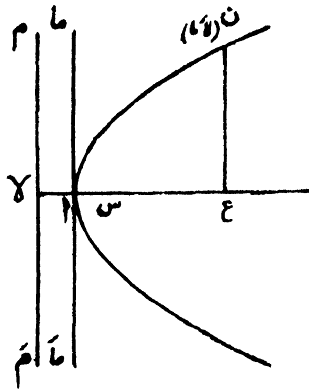
= ۲ ا ع

اور لا ع + س ع = لا س = ۲ ا س

اس لیے دونوں صورتوں میں ن ع^2 = ۴ ا س × ا ع

نوٹ (۱) رشتہ ع ن^2 = ۴ ا س × ا ع سے ظاہر ہے کہ جوں جوں ا ع بڑھتا ہے ع ن بھی بڑھتا ہے ۔ پس معلوم ہوتا ہے کہ مکافی بند منحنی نہیں ہے ۔

نوٹ (۲) مکافی کے رأس ا میں سے محور پر عمود وار ایک خط ما ا مَا کھینچو۔



اب مکافی کے محور ا س (ممدودہ) اور خط ما ا مَا کو بالترتیب حوالہ کے لا محور اور ما محور مانو۔

فرض کرو کہ مکافی کے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں،

تب ا ع = لا اور ع ن = ما

نیز رأس کے ماسکی فاصلہ ا س کو ا سے تعبیر کرو، تب اوپر کے نتیجہ ع ن^2 = ۴ ا س × ا ع کو ذیل کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں ۔

ما^2 = ۴ ا لا

چونکہ مکافی پر کے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ رشتہ ما^2 = ۴ ا لا مکافی کی مساوات ہے ۔

عکس ۔ اگر ایک نقطہ دو علی القوائم متقاطع خطوط کی سطح میں اس طرح

حرکت کرے کہ ایک خط سے اُس کے عمودی فاصلہ کا مربع ایسے بدلے جیسے دوسرے خط سے اس نقطہ کا عمودی فاصلہ تو متحرک نقطہ ایک مکافی مرتسم کریگا جس کا محور پہلا خط ہے اور جس کا راس دیے ہوئے خطوط کا نقطۂ تقاطع ہے ۔

امثلہ ۵

نوٹ ۔ امثلہ میں جہاں کہیں حروف کی تشریح نہیں کی گئی ان کا مفہوم ہمیشہ وہی لیا جائے جو سابقہ اشکال میں بتایا گیا ہے ۔

(۱) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کے فاصلوں کا فرق مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک مکافی ہے ۔

(۲) مکافی کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ہے ۔ م م، کوئی خط ہے جو مکافی کے مرتب پر عمود وار ہے ۔ س م کا عمودی ناصف م م، سے ن پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن مکافی پر کا نقطہ ہے ۔

(۳) مکافی کا ماسکہ اور مکافی پر کے دو نقطے معلوم ہیں ۔ مکافی کا مرتب محور اور راس معلوم کرو ۔

(۴) ثابت کرو کہ محور کے متوازی کوئی خط مکافی کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے ۔

(۵) مکافی پر دو نقطے ن اور نَ اس طرح واقع ہیں کہ س ن = س نَ ثابت کرو کہ س ن اور س نَ مکافی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں اور مکافی کا محور ن نَ کی عمودی تنصیف کرتا ہے ۔

(۶) مکافی کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے اور خط س م اس خط سے جو راس ا میں سے محور پر عمود وار کھینچا جائے نقطہ ما پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ س م کا وسطی نقطہ ما ہے اور ن ما عمود ہے س م پر اور $\angle$ س ن م کی تنصیف کرتا ہے ۔

(۷) مکافی پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن م مرتب پر عمود ہے س میں سے

خط س سے کھینچا گیا ہے جو س ن پر عمود وار ہے اور مرتب سے ے پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ن ے زاویہ س ن م کا ناصف ہے ۔

(۸) ن س نَ مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود ہیں ۔ ثابت کرو کہ > م س مَ قائمہ ہے ۔

(۹) ثابت کرو کہ کسی ماسکی وتر کے قطر پر جو دائرہ کھینچا جائے وہ مرتب کو مس کرتا ہے ۔

(۱۰) ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک ثابت خط کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے ۔

(۱۱) ایک دائرہ ایک ثابت خطِ مستقیم کو اور ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے ۔

(۱۲) مکافی کا مرتب اور مکافی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں، ماسکہ کا طریق معلوم کرو ۔

(۱۳) مکافی پر کے دو نقطے اور مکافی کا مرتب معلوم ہیں ۔ مکافی کا ماسکہ معلوم کرو ۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں ؟

(۱۴) ثابت کرو کہ مکافی کے راس ا اور وترِ خاص کے سروں خ، خَ میں سے گزرنے والے دائرہ کا نصف قطر $\frac{5}{8}$ × خ خَ ہے ۔

(۱۵) مکافی پر کے کسی نقطہ ن سے ن ا پر عمود ن ل کھینچا گیا ہے جو محور سے ل پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ع ل کا طول ہمیشہ وترِ خاص کے مساوی ہوگا ۔

(۱۶) ثابت کرو کہ راس ا سے مثلث س ن ع کے حائط دائرہ کے مماس کا طول $\frac{1}{2}$ ن ع ہے ۔

(۱۷) راس ا کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر $\frac{3}{2}$ ا س ہے ۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ اور مکافی کا وترِ مشترک ا س کی عمودی تنصیف کرتا ہے ۔

(۱۸) مکافی کا کوئی ماسکی وتر ن س نَ مرتب سے ک پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن س نَ ک ایک موسیقی صعف ہے ۔

(۱۹) ن س نَ مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔ اور ن ع، نَ عَ محور پر عمود ہیں۔ سوال ۱۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ ا ع × ا عَ = ا س^۲

(۲۰) مندرجۂ بالا سوال ۱۹ میں ثابت کرو کہ ع ن اور عَ نَ کا ہندسی اوسط نیم وترِ خاص ہے۔

(۲۱) مکافی کا محور، ماسکہ اور مکافی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں مرتب معلوم کرو۔

(۲۲) مکافی پر کے کوئی دو نقطے ن اور نَ ہیں اور ن نَ کے قطر پر دائرہ کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ دائرہ یا تو مرتب کو مس کریگا یا قطع ہی نہیں کریگا اور مس کرنے کی صورت میں وتر ن نَ ماسکہ میں سے گزریگا۔

(۲۳) مکافی پر کا کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ ع ن کے وسطی نقطہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔

(۲۴) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے۔ اگر ا ع = ع ن تو ثابت کرو کہ ہر ایک کا طول وترِ خاص کے مساوی ہے۔

(۲۵) مکافی پر کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے، اور ن م کا وسطی نقطہ ق ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے جس کا راس ا لا کا وسطی نقطہ ہے۔

۲۷ ۔ مسئلہ۔ اگر مکافی کے دو نقطوں ن، نَ کو ملانے والا خط مرتب سے ک پر ملے اور مکافی کا ماسکہ س ہو تو س ک خطوط س ن، س نَ کے درمیانی زاویہ کا خارجی ناصف ہوگا۔

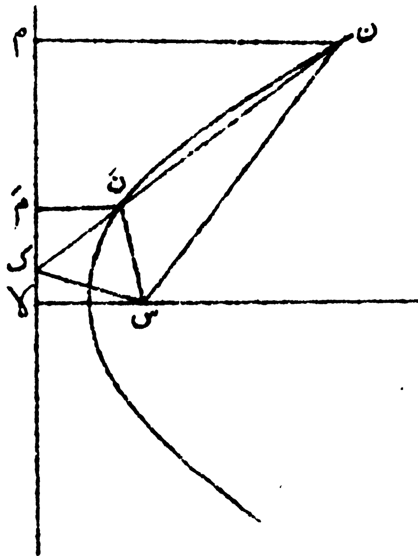
س ن، س نَ اور س ک کو ملاؤ۔

ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود نکالو۔

تب متشابہ مثلثات ک ن م اور ک نَ مَ سے حاصل ہوتا ہے،

$$\frac{ک ن}{ک نَ} = \frac{ن م}{نَ مَ}$$

$$= \frac{س ن}{س نَ} \quad \text{(بموجب مکافی کی تعریف کے)}$$



اس لیے س ک خارجی ناصف ہے ∠ ن س نَ کا۔

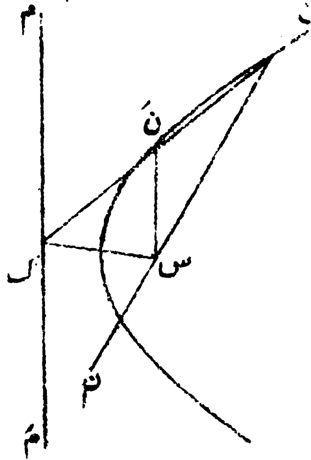
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۔ تعریفات — اگر ایک منحنی پر ن اور نَ دو نقطے ہوں تو وتر ن نَ کے انتہائی مقام کو، جبکہ نَ منحنی پر حرکت کرکے نقطہ ن کے نہایت قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے، نقطہ ن پر منحنی کا مماس کہتے ہیں اور نقطہ ن مماس کا نقطۂ تماس کہلاتا ہے۔ نیز وہ خط جو ن میں سے گزرتا ہے اور ن پر کے مماس پر عمود وار ہے ن پر منحنی کا عماد کہلاتا ہے۔

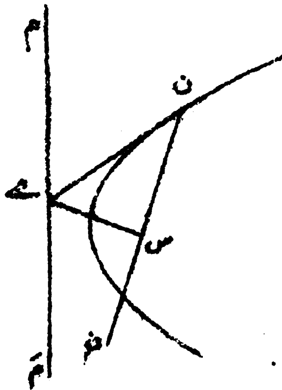
مسئلہ۔ اگر مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملے تو ن ے کے محاذی ماسکہ س پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

فرض کرو کہ مکافی پر ن کے قریب ایک اور نقطہ نَ ہے اور خطِ مستقیم ن نَ ممدودہ مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

ن س کو کسی نقطہ نؔ تک خارج کرو۔



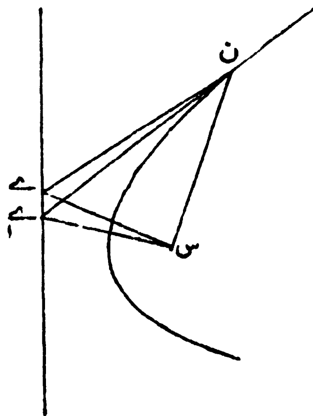
تب دفعہ ۲۷ کی رُو سے
س ک ∠ ن س نَ کا خارجی ناصف ہوگا۔



فرض کرو کہ نقطہ نَ منحنی پر حرکت کرکے ن کے بے حد قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہوجاتا ہے، تب وتر ن نَ کا انتہائی مقام نقطہ ن پر کا مماس

ہوگا اور نقطہ ک نقطہ ے پر منطبق ہو جائیگا ۔ چونکہ ن اور نَ ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے ∠ ن س نَ معدوم ہو جاتا ہے ۔ اس لیے زاویہ نَ س ن دو قائموں کے مساوی ہو جاتا ہے اور چونکہ س ے ناصف ہے ∠ نَ س ن کا اس لیے ∠ ن س ے قائمہ ہے ۔

عکس ۔ اگر مکافی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ماسکہ س سے س ن پر عمود س ے کھینچا جائے جو مرتب سے ے پر ملے تو ن ے مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس ہوگا ۔

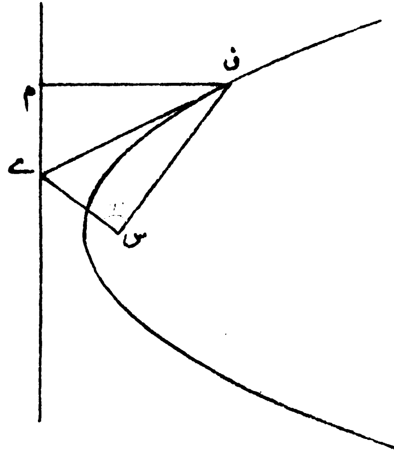


اگر ن ے مکافی کا مماس نہیں ہے تو فرض کرو کہ ن پر کا مماس مرتب سے ے ا پر ملتا ہے ۔ تب ∠ ن س ے ا قائمہ ہے ۔ نیز بموجب مفروض ∠ ن س ے بھی قائمہ ہے ۔ اس لیے خطوط س ے اور س ے ا ایک دوسرے پر منطبق ہیں یعنی نقاط ے اور ے ا ایک دوسرے پر منطبق ہیں ۔ اس لیے ن ے مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس ہے ۔

نوٹ :۔ اگر مکافی کا ماسکہ س اور مرتب م مَ معلوم ہوں تو مسئلۂ بالا کے عکس کی مدد سے مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس کھینچ سکتا ہے ۔

۲۹ ۔ مسئلہ ۔ مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ن سے

مرتب پر کے عمود ن م اور ن کے ماسکی فاصلہ ن س کے درمیانی زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے ۔



فرض کرو کہ مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے ، س ے کو ملاؤ ۔

دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کی رُو سے ∠ ن س ے قائمہ ہے ۔

قائم الزاویہ مثلثوں ن م ے اور ن س ے میں وتر ن ے مشترک ہے اور

ضلع ن م = ضلع ن س

اس لیے مثلثات ن م ے اور ن س ے آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں ۔

اس لیے ∠ م ن ے = ∠ س ن ے

یعنی مماس ن ے زاویہ م ن س کا داخلی ناصف ہے ۔

عکس ۔ اگر مکافی کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہو تو زاویہ س ن م کا اندرونی ناصف مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس ہوگا ۔

فرض کرو کہ ∠ س ن ے کا ناصف ن ے مرتب سے

ے پر ملتا ہے ۔
س ے کو ملاؤ ۔
تب مثلثات ن س ے اور ن م ے میں ن س = ن م
ن ے مشترک ہے
اور ∠ س ن ے = ∠ م ن ے
اس لیے مثلثات ن س ے اور ن م ے آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں ۔
اس لیے ∠ ن س ے = ∠ ن م ے = قائمہ
اس لیے دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کے عکس کی رُو سے ن ے مکافی کا مماس ہے ۔

فرع (۱) مسئلہ بالا کی شکل میں ے س = ے م
اور ∠ س ے ن = ∠ م ے ن

فرع (۲) مکافی کے راس ا پر کا مماس محور پر عمود ہوتا ہے ۔
معمولی ترقیم کے مطابق چونکہ ا لا عمود ہے مرتب پر،
اس لیے مسئلہ بالا کی رُو سے ا پر کا مماس ∠ س ا لا کی تنصیف کرتا ہے ۔ لیکن ∠ س ا لا = ۲ قائمے
اس لیے ا پر کا مماس ا س پر عمود ہے ۔

امثلہ

(۱) مکافی کے نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے، ثابت کرو کہ ن پر کا مماس خط س م کی عمودی تنصیف کرتا ہے ۔
(۲) مکافی کے نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے اور ن ا ممدودہ مرتب سے ک پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ∠ م س ک قائمہ ہے ۔
(۳) ن س نَ مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے ۔ ن ا ممدودہ مرتب

سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نَ ک مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

(۴) اگر دو مکافیوں کا مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان مکافیوں کے مشترک نقاط کو ملانے والا خط ان کے ماسکوں کو ملانے والے خط کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ وتر خاص خ خَ کے سروں پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع لا ہے۔

(۶) متعدد مکافیوں کے مرتب اور محور مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکافیوں میں سے ہر ایک دو ثابت علی القوائم خطوط کو مس کرتا ہے۔

(۷) ایک مکافی کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ پر کوئی نقطہ ے م مَ کے درمیان واقع ہے، ثابت کرو کہ زاویوں م ے س اور مَ ے س کے اندرونی ناصف مکافی کو مس کرتے ہیں۔

(۸) دو مکافیوں کا ایک ہی مرتب ہے اور ان کے ماسکے س اور سَ ہیں، ثابت کرو کہ ان مکافیوں کے مشترک مماسات مرتب اور س سَ کے نقطۂ تقاطع پر ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔

(۹) ن اور نَ مکافی پر کے دو ثابت نقطے ہیں اور ق منحنی پر ایک متغیر نقطہ ہے۔ ن ق اور نَ ق مرتب سے بالترتیب ک اور کَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ∠ ک س کَ مستقل ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کوئی خطِ مستقیم مکافی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرسکتا۔

(۱۱) اگر نقطہ ن پر کے مماس پر کوئی نقطہ ت ہو تو ثابت کرو کہ ت س = ت م، جہاں ن م مرتب پر عمود ہے۔

(۱۲) نقاط ن اور نَ پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ت ہے اور ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ ت م = ت مَ = ت س

(۱۳) ثابت کرو کہ مکافی کے کسی نقطہ پر کا مماس وتر خاص ممدودہ اور مرتب سے دو ایسے نقطوں پر ملتا ہے جو ماسکہ سے متساوی الفصل ہیں۔

(۱۴) مکافی پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن ع عمود ہے محور پر۔ ع ن ممدودہ وترِ خاص کے سرے خ پر کے مماس سے ت پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

س ن = ع ت

(۱۵) اگر ایک کتاب کے ورق کو اس طرح تہ کیا جائے کہ ایک کونہ مقابل کے ضلع پر رہے تو ثابت کرو کہ شکن ہمیشہ ایک مکافی کو مس کریگی۔

(۱۶) مکافی کا مرتب اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا مماس معلوم ہیں ۔ ماسکہ معلوم کرو۔

(۱۷) مکافی کا مرتب اور مکافی کے دو مماس معلوم ہیں ۔ ماسکہ معلوم کرو۔

(۱۸) اگر تین مکافیوں کا ایک ہی مرتب ہو تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو دو کے تین مشترک وتر اِن مکافیوں کے ماسکوں سے بننے والے مثلث کے حائط مرکز میں سے گزرتے ہیں ۔

(۱۹) ثابت کرو کہ روشنی کی ایک شعاع جو مکافی کے محور کے متوازی ہے، مکافی پر منعکس ہونے کے بعد مکافی کے ماسکہ میں سے گزرتی ہے۔

۳۰۔ ترقیم ــــ نقطہ ن پر کے مماس اور محور کے نقطۂ تقاطع کو بالعموم ط سے اور ن پر کے عماد اور محور کے نقطۂ تقاطع کو بالعموم گ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

مسئلہ ــ اگر مکافی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس اور عماد محور سے بالترتیب ط اور گ پر ملیں تو س ط = س ن = س گ

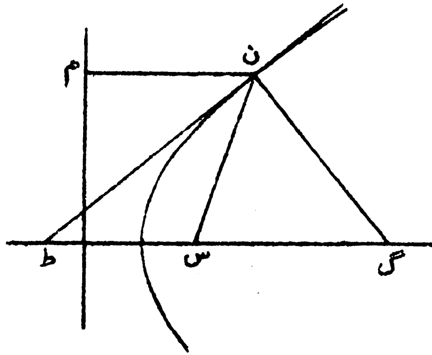
ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو

تب دفعہ ۲۹ کی رُو سے ∠ م ن ط = ∠ ط ن س

لیکن چونکہ ن م // س ط

اس لیے ∠ م ن ط = ∠ ن ط س

اس لیے ∠ ط ن س = ∠ ن ط س .... (۱)



اس لیے س ط = س ن

چونکہ مثلث ط ن گ میں ∠ ط ن گ قائمہ ہے

اس لیے ∠ ن ط گ + ∠ ن گ ط = ایک قائمہ

اس لیے ∠ ن ط گ + ∠ ن گ ط

= ∠ ط ن س + ∠ س ن گ ۔۔۔۔ (۲)

اس لیے (۱) اور (۲) کی مدد سے

∠ ن گ ط = ∠ س ن گ

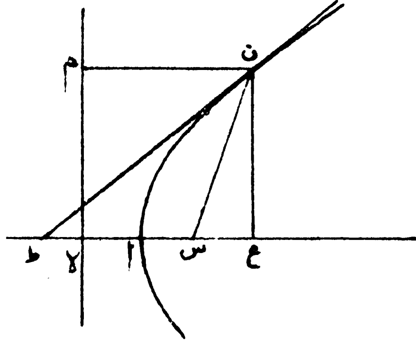
اس لیے س ن = س گ

اس لیے س ط = س ن = س گ

۳۱ ۔ تعریف ـــ اگر منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس محور سے ط پر ملے اور ن ل عمود ہو محور پر، تو ط ل کو ن کا زیر مماس کہتے ہیں ۔

مسئلہ ـــ مکافی کے کسی نقطہ کے زیر مماس کی تنصیف راس پر

ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس محور سے ط پر ملتا ہے، اور ن ع عمود ہے محور پر۔ ثابت کرنا ہے کہ نقطہ ن کے زیر مماس ط ع کی تنصیف راس ا پر ہوتی ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

دفعہ ۳۰ کی رُو سے ط س = س ن

لیکن س ن = ن م = ل ع

∴ ط س = ل ع

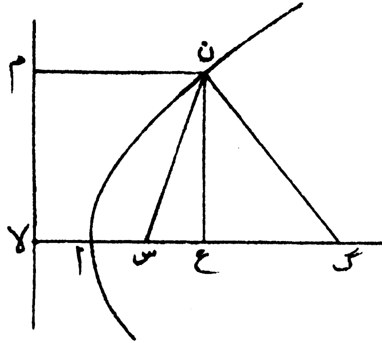
لیکن ا س = ل ا

اس لیے ط ا = ا ع یعنی ط ع کا وسطی نقطہ راس ا ہے۔

۳۲۔ تعریف — اگر منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے اور ن ع عمود ہو محور پر تو ع گ کو ن کا زیر عماد کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ مکافی کے کسی نقطہ کا زیر عماد مستقل ہوتا ہے اور

نیم وترِ خاص کے مساوی ہوتا ہے ۔



فرض کرو کہ مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے ۔
ن سے ن م اور ن ع بالترتیب مرتب اور محور پر عمود نکالو ۔
دفعہ ۳۰ کی رُو سے

س گ = س ن

لیکن س ن = م ن = لا ع

اس لیے س گ = لا ع

اس لیے ع گ = لا س = ۲ ا س = نیم وترِ خاص

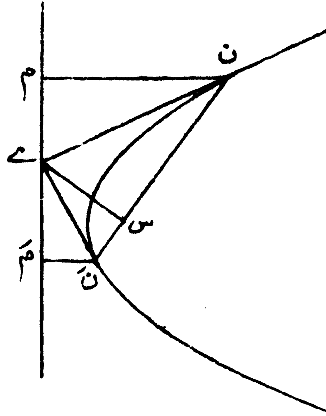
امثلہ ۸

(۱) اگر دفعہ ۳۰ کی شکل میں گ سے ایک خط گ ع، ن ط کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ا سکہ س متساوی الفصل ہے ن ط اور گ ع سے ۔

(۲) اگر دفعہ ۳۰ کی شکل میں مثلث س ن گ مساوی الاضلاع ہو تو ثابت کرو کہ ∠ ط م گ قائمہ ہوگا ۔

(۳) دفعہ ۳۰ کی شکل میں ثابت کرو کہ ∠ ن س گ = ۲∠ ن ط س
(۴) مکافی کا ایک مماس کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہو۔
(۵) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ ط لا = س ع
(۶) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ △ م ط لا ≡ △ ن س ع
(۷) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ م ط = س ن
(۸) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ م ط ن س معیّن ہے۔
(۹) سوال ۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر س ما عمود ہو ن ط پر، تو ما وسطی نقطہ ہوگا ن ط کا، اور ما ہمیشہ ا پر کے مماس پر واقع ہوگا۔
(۱۰) دفعہ ۳۱ کی شکل میں اگر △ ن ط ع کے حائط دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ ر^2 = ا ع × س ن -
(۱۱) اگر دفعہ ۳۲ کی شکل میں △ ن س گ مساوی الاضلاع ہو تو مثلث کا ہر ضلع وترِ خاص کے مساوی ہوگا۔
(۱۲) بتاؤ کہ مکافی کے دیے ہوئے نقطہ پر کا عماد مماس کھینچنے کے بغیر کس طرح کھینچا جا سکتا ہے۔
(۱۳) دفعہ ۳۲ کی شکل میں ثابت کرو کہ ن گ^2 = ۴ ا س × س ن
(۱۴) ثابت کرو کہ ماسکہ سے مکافی کے کسی عماد پر کے عمود کے پائین کا طریق مکافی ہوتا ہے۔
(۱۵) اگر دو مکافیوں کا ماسکہ مشترک ہو اور اُن کے محور ایک ہی خطِ مستقیم میں مخالف سمتوں میں واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ مکافی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرینگے۔ [نوٹ:- اگر دو منحنیوں کے نقطۂ تقاطع پر کے مماس ایک دوسرے کو عمود وار قطع کریں تو کہا جاتا ہے کہ یہ منحنی ایک دوسرے کو عمود وار یا علی القوائم یا زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔]
(۱۶) متعدد مکافیوں میں ماسکہ اور محور مشترک ہیں اور مشترک محور کے ایک ثابت نقطہ سے اِن کے مماسات کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاطِ تماس ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

۳۴۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو مرتب پر عمود وار قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س نَ مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔
س میں سے س ے، ن نَ پر عمود وار کھینچو جو مرتب سے ے پر ملے۔ ن ے اور نَ ے کو ملاؤ، اور ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود نکالو۔
چونکہ بموجب عمل ∠ ن س ے قائمہ ہے،
اس لیے ن ے مکافی کا مماس ہے (بموجب عکس دفعہ ۲۸)
اس طرح سے نَ ے بھی مکافی کا مماس ہے۔
اور ان مماسوں کا نقطۂ تقاطع ے مرتب پر ہے۔
اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ∠ ن ے نَ قائمہ ہے۔
دفعہ ۲۹ کی فرع کی رُو سے
∠ ن ے س = ∠ ن ے م
یعنی ے ن اندرونی ناصف ہے ∠ س ے م کا
اسی طرح ے نَ اندرونی ناصف ہے ∠ س ے مَ کا
∴ ن ے نَ قائمہ ہے۔

امثلہ ۹

(۱) اگر مکافی کے ایک ماسکی وتر ن س نَ کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ے ہو اور ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ م مَ کا وسطی نقطہ ے ہوگا۔

(۲) مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکافی کے دو مماس ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔

(۳) مکافی کے دو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۴) کسی ماسکی وتر ن نَ کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ے ہے اور ن م اور نَ مَ مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ س م اور س مَ بالترتیب نَ ے اور ن ے کے متوازی ہیں۔

(۵) ایک مکافی کا مرتب اور ایک مماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکافی ایک اور ثابت خط کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے مماس پر عمود وار ہے۔

(۶) ایک مکافی کا مرتب اور ایک مماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکافی کے ماسکہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۳۴ ۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر کوئی نقطہ ت ہو اور ت سے ن کے ماسکی فاصلہ س ن پر عمود ت د اور مرتب پر عمود ت ہ ہوں تو س د = ت ہ

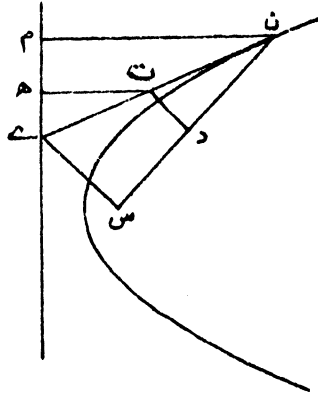
فرض کرو کہ ن پر کا مماس مرتب سے ے پر ملتا ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

چونکہ ∠ ن س ے قائمہ ہے، اور از روئے عمل ∠ ن د ت بھی قائمہ ہے۔

اس لیے س ے // د ت

اس لیے $\frac{\text{س د}}{\text{س ن}} = \frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}}$ .... (۱)



لیکن متشابہ مثلثات ے ت ھ اور ے ن م میں

$$\frac{\text{ے ت}}{\text{ے ن}} = \frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

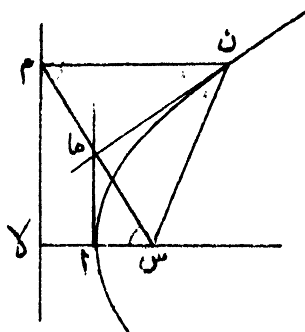
$$\frac{\text{س د}}{\text{س ن}} = \frac{\text{ت ھ}}{\text{ن م}}$$

اس لیے $\frac{\text{س د}}{\text{ت ھ}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = ۱$ (کیونکہ ن مکافی پر کا نقطہ ہے)

اس لیے س د = ت ھ

۳۵۔ مسئلہ۔ اگر مکافی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر ماسکہ س سے عمود س ما نکالا جائے تو (۱) ما کا طریق راس ا پر کا

مماس ہوگا۔ اور (۲) س ما^2 = ا س × س ن



(۱) ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو، مام کو ملاؤ
اب مثلثات ن مام اور ن ماس میں
ن م = ن س
ن ما مشترک ہے۔
اور ∠ م ن ما = ∠ س ن ما (دفعہ ۲۹)
اس لیے مثلثات ن مام اور ن ماس آپس میں ہر طرح سے برابر ہیں۔
اس لیے مام = ماس
اور ∠ ن مام = ∠ ن ماس = قائمہ (ازروئے مفروض)
پس معلوم ہوا کہ م ماس خطِ مستقیم ہے اور م س کا وسطی نقطہ ما ہے۔
چونکہ مثلث س م لا میں س م کا وسطی نقطہ ما ہے اور س لا کا وسطی نقطہ ا ہے
اس لیے ا ما متوازی ہے لا م کے

یعنی ا ما محور ا س پر عمود ہے یعنی ا ما راس ا پر کا مماس ہے
(بموجب فرع ۲ دفعہ ۲۹)

پس ثابت ہوا کہ ما کا طریق راس ا پر کا مماس ہے۔

(۲) اب چونکہ ن م متوازی ہے س لا کے

اس لیے ∠ ا س ما = ∠ س م ن

= ∠ ن س م (کیونکہ س ن = ن م)

اب مثلثات ا س ما اور ما س ن میں

∠ ا س ما = ∠ ما س ن

اور ∠ ما ا س = ∠ ن ما س (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اس لیے مثلثات ا س ما اور ما س ن متشابہ ہیں۔

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{ا س}}{\text{س ما}} = \frac{\text{س ما}}{\text{س ن}}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{س ما}^2 = \text{ا س} \times \text{س ن}$$

اس مسئلہ کے پہلے حصّہ کا عکس نہایت اہم ہے اور حسب ذیل ہے۔

عکس: اگر مکافی کے راس پر کے مماس پر کوئی نقطہ ما ہو اور ما ن عمود کھینچا جائے ما س پر، تو ما ن مکافی کا مماس ہوگا۔

فرض کرو کہ س ما ممدودہ مرتب سے م پر ملتا ہے،

م سے مرتب پر عمود م ن نکالو جو ما ن سے ن پر ملے

س ن کو ملاؤ۔

مثلثات ن ما م اور ن ما س میں

ما م = ما س

ما ن مشترک ہے

اور ∠ ن ما م = ∠ ن ما س (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اس لیے مثلثات ن ما م اور ن ما س آپس میں ہر طرح سے

برابر ہیں

اس لیے ن م = ن س

اور ∠ م ن ما = ∠ س ن ما

یعنی ن مکافی پر کا نقطہ ہے اور ن ما نقطہ ن پر کا مماس ہے۔

فرع ۱۔ ∠ س ن ما = ∠ س ما ا

کیونکہ مثلثات س ن ما اور س ما ا تشابہ ہیں۔

فرع ۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خطِ مستقیم پر کے عمود کے پائین کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکافی کو مس کریگا جس کا ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

تعریف۔ اگر ایک خط ایک سطح مستوی میں اس طرح حرکت کرے کہ وہ ہمیشہ ایک خاص منحنی کو مس کرے تو منحنی خط کا لفاف کہلاتا ہے اور کہا جاتا ہے کہ خطِ منحنی کو لف کرتا ہے۔

پس مندرجۂ بالا تعریف کی بناء پر فرع (۲) کو حسبِ ذیل الفاظ میں بھی بیان کر سکتے ہیں :۔

اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خطِ مستقیم پر کے عمود کے پائین کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکافی کو لف کریگا جس کا ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا یا بالفاظِ دیگر متغیر خط کا لفاف ایک مکافی ہوگا جس کا ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

۳۶۔ مسئلہ عملی۔ کسی بیرونی نقطہ سے مکافی کے دو مماس کھینچنا۔

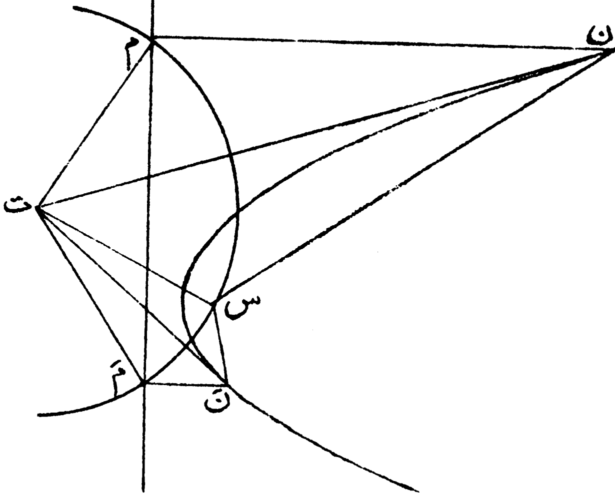
طریقۂ اول۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ ت ہے اور بیرونی نقطہ ت سے مکافی کے مماسات ت ن اور ت نَ ہیں۔

ن اور نَ سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور نَ مَ نکالو۔

اب مثلثات س ن ت اور م ن ت میں

ن س = ن م
ن ت مشترک ہے



∠ س ن ت = ∠ م ن ت　(دفعہ ۲۹)

∴ مثلثات س ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

∴ ت س = ت م

اس طرح سے ت س = ت مَ

پس نقاط م اور مَ معلوم ہو سکتے ہیں۔

ترکیب :۔

ت کو مرکز مان کر ت س کی دُوری پر ایک دائرہ کھینچو جو مرتب کو م اور مَ پر قطع کرے۔ م اور مَ سے مرتب پر بالترتیب عمود م ن اور مَ نَ نکالو جو مکافی سے ن اور نَ پر ملیں، ت ن اور ت نَ کو ملاؤ۔ تب ت ن اور ت نَ مطلوبہ مماس ہونگے۔

مثلثات س ن ت اور م ن ت میں

ن س = ن م
ن ت مشترک ہے۔

اور ت س = ت م (ازروئے عمل)

اس لیے مثلثات س ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

∴ ∠ س ن ت = ∠ م ن ت

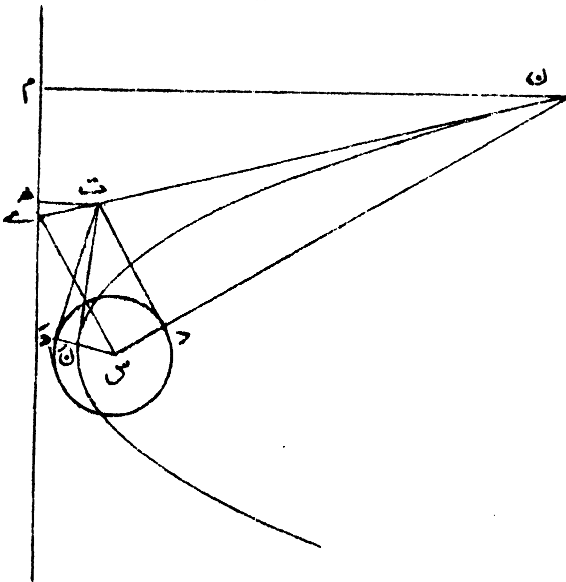
اس لیے دفعہ ۲۹ کے عکس کی رُو سے

ن ت مکافی کا مماس ہوگا۔

اسی طرح سے نَ ت بھی مکافی کا مماس ہوگا۔

طریقہ دوم۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے مکافی کے مماس ت ن اور ت نَ ہیں۔



ت سے مرتب پر عمود ت ھ اور س ن اور س نَ پر بالترتیب عمود ت د اور ت دَ نکالو۔

تب دفعہ ۳۱ کی رُو سے

س د = ت ھ = س دَ

چونکہ ت ھ معلوم ہے اس لیے س د معلوم ہو سکتا ہے۔
اور چونکہ د اور دَ پر کے زاویے قائمے ہیں۔
اِس لیے ت د اور ت دَ اُس دائرہ کے مماس ہیں جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر س د ہے جو ت ھ کے مساوی ہے۔
پس تحلیل بالا کی بنا پر بیرونی نقطہ ت سے مکافی کے دو مماس کھینچنے کا حسبِ ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔
ترکیب۔ دیے ہوئے نقطہ ت سے مرتب پر عمود ت ھ نکالو۔ س کو مرکز مان کر ت ھ نصف قطر کا دائرہ کھینچو اور ت سے اس دائرہ کے مماسات ت د اور ت دَ کھینچو۔
س د اور مکافی کا نقطۂ تقاطع ن اور س دَ مکافی کا نقطۂ تقاطع نَ معلوم کرو۔ تب ت ن اور ت نَ مکافی کے دو مطلوبہ مماس ہونگے۔
فرض کرو کہ ن ت مرتب سے ے پر ملتا ہے۔
س ے کو ملا لو، اور ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔
متشابہ مثلثات ے ت ھ اور ے ن م میں

$$\frac{ے ت}{ے ن} = \frac{ت ھ}{ن م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

چونکہ ن مکافی پر کا نقطہ ہے اس لیے ن م = س ن ....(۲)
اور بموجب عمل دائرہ (س) کا نصف قطر س د = ت ھ .... (۳)
(۲) اور (۳) کی مدد سے رشتہ (۱) ہو جاتا ہے

$$\frac{ے ت}{ے ن} = \frac{س د}{س ن}$$

اس لیے س ے // د ت
اس لیے ∠ ن س ے قائمہ ہے۔

اس لیے ن ے مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس ہے اور یہ مماس ازروئے عمل دیئے ہوئے بیرونی نقطہ ت میں سے گزرتا ہے۔

اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ت نَ بھی مکافی کا مماس ہے۔ یعنی ت سے مکافی کے مطلوبہ مماس ت ن اور ت نَ ہیں۔

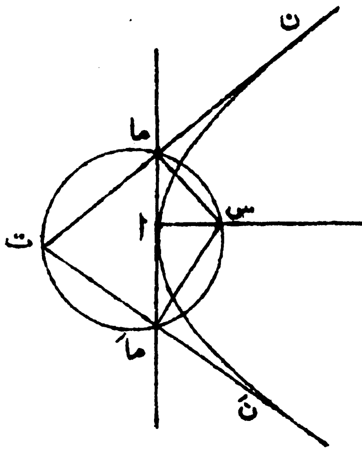
نوٹ :۔ شکل بالا میں دائرہ (س) کے مماسات ت د اور ت دَ کے محاذی ماسکہ س پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

یعنی ∠ ت س ن = ∠ ت س نَ

پس ضمناً یہ بھی معلوم ہوا کہ کسی بیرونی نقطہ سے مکافی کے دو مماسوں کے مقابل ماسکہ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

طریقہ سوم۔

تحلیل ۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے مکافی کے مماسات ت ن اور ت نَ ہیں۔



ماسکہ س سے مماسات ت ن اور ت نَ پر بالترتیب عمود س ما اور س ماَ نکالو۔

تب دفعہ ۳۵ کی رُو سے نقاط ما اور ماَ راس ا پر کے مماس پر واقع ہونگے۔

نیز چونکہ زاویے س ما ت اور س ماَ ت قائمے ہیں،

اس لیے ت س کے قطر پر کا دائرہ نقاط ما اور ماَ سے گزریگا۔

پس تحلیل بالا کی بنا پر مماسات کھینچنے کا حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔

ت س قطر پر دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ دائرہ راس ا پر کے مماس سے ما اور ماَ پر ملتا ہے۔

تب ت ما اور ت ماَ ممدودہ مکافی کے مطلوبہ مماس ہونگے۔

چونکہ ماسکہ س سے خطوط ت ما اور ت ماَ پر کے عمودوں کے پائیں راس ا پر کے مماس پر ہیں، اس لیے دفعہ ۳۵ کے عکس کی رُو سے خطوط ت ما اور ت ماَ ممدودہ مکافی کے مماس ہیں جن کے نقاط تماس بالترتیب ن اور نَ دفعہ ۳۵ کے مسئلہ کے عکس کے طریقہ سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

امثلہ ۱۰

(۱) اگر مکافی کے مرتب پر کے کسی نقطہ ے سے مکافی کے مماسات کھینچے جائیں تو دفعہ ۳۶ کے طریقۂ اول کی مدد سے ثابت کرو کہ مماسات کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے۔

(۲) اگر ایک زاویۂ قائمہ کی ایک ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے اور راس ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکافی کو مس کریگی جس کا ماسکہ دیا ہوا ثابت نقطہ ہے اور جس کے راس پر کا مماس دیا ہوا ثابت خطِ مستقیم ہے۔

(۳) مکافی کا ماسکہ اور دو مماس معلوم ہیں، مرتب معلوم کرو۔

(۴) مکافی کا ماسکہ اور ایک مماس معلوم ہیں۔ راس کا طریق معلوم کرو۔

(۵) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس راس ا پر کے مماس سے

ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ما میں سے محور کے متوازی خط ماسکی فاصلہ س ن کی تنصیف کرتا ہے۔

(۶) مکافی کا کوئی مماس مرتب کے متوازی ایک ثابت خط سے ملتا ہے اور نقطۂ تقاطع سے مماس پر عمود وار ایک خط کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط ایک مکافی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ وہی ہے جو دیے ہوئے مکافی کا ہے۔

(۷) مکافی پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ن س کے قطر پر کا دائرہ راس پر کے مماس کو مس کرتا ہے۔

(۸) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس راس ا پر کے مماس سے ما پر اور مرتب سے ے پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) ن ما × ن ے = ن س^۲ اور (۲) ن ما × ما ے = اس × س ن

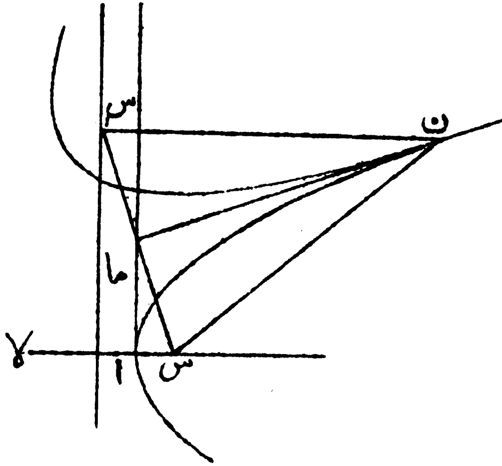
(۹) مکافی کا ماسکہ، محور اور ایک مماس معلوم ہیں۔ مکافی کو مرتسم کرو۔

(۱۰) مکافی کا ماسکہ س مکافی پر کا ایک نقطہ ن اور س سے ن پر کے مماس پر کے عمود کا طول معلوم ہیں، مکافی کو مرتسم کرو۔

(۱۱) مکافی کا ماسکہ ایک مماس اور وتر خاص کا طول معلوم ہیں۔ مکافی کو مرتسم کرو۔

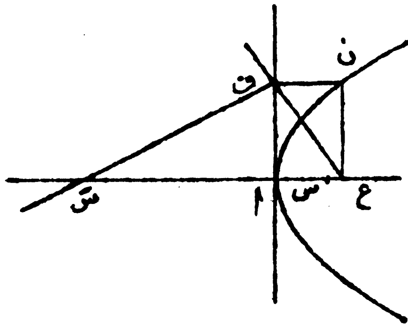
(۱۲) ایک مکافی ایک اور مساوی مکافی پر (جو ثابت ہے) اس طرح لڑھکتا ہے کہ ابتداءً ان کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔ ثابت کرو کہ لڑھکنے والے مکافی کا ماسکہ ثابت مکافی کے مرتب پر حرکت کرتا ہے۔

[اشارہ۔ کسی ایک مقام پر مکافیوں کے راسوں سے نقطۂ تماس ن تک قوسوں کے طول مساوی ہونگے اس لیے نقطۂ تماس کے ماسکی فاصلے ن س، ن س، بھی مساوی ہونگے۔ اور نقطۂ تماس ن پر کا مشترک مماس ن ما ماسکوں کو ملانے والے خط س س، کی عمودی تنصیف ما پر کریگا۔ اور یہ نقطۂ تقاطع ما ہمیشہ ثابت مکافی کے راس ا پر کے مماس پر



ہوگا۔ اس لیے لڑھکنے والے مکافی کا ماسکہ س۱ ثابت مکافی کے مرتب پر ہوگا)۔

(۱۳) مکافی کے کسی نقطہ ن سے محور پر عمود ن ع اور راس پر کے مماس پر عمود ن ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ع ف ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے۔



ف سے ایک خط ف سً، ف ع پر عمود وار کھینچو جو دیے ہوئے مکافی کے

محور سے سؔ پر ملے ۔

قائم الزاویہ مثلث ع ف سؔ میں ا ف² = ا ع × ا سؔ ...... (۱)

لیکن ا ف = ع ن

نیز ع ن² = ۴ ا س × ا ع

اس لیے ا ف² = ۴ ا س × ا ع .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

ا سؔ = ۴ ا س

اس لیے سؔ ایک ثابت نقطہ ہے ۔

اس لیے ف ع ایک مکافی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ سؔ ہے اور جس کے راس پر کا مماس ا ف ہے ۔

(۱۴) ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو ایک ثابت خط جن نقطوں پر قطع کرتا ہے، اُن نقطوں پر دائروں کے مماسات کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہ مماسات ایک ثابت مکافی کو مس کرتے ہیں ۔

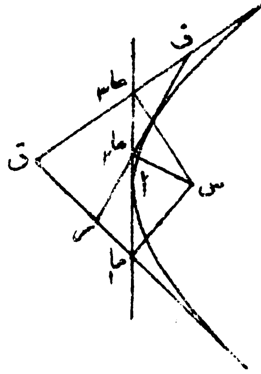
(۱۵) مکافی کے ماسکہ س میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو مکافی کے کسی مماس سے ایک دیے ہوئے زاویہ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مماس اور اس خط کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔

[مطلوبہ طریق مکافی کا ایک مماس ہے جو محور کے ساتھ دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بناتا ہے ۔]

۳۷ ۔ اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے ایک مکافی کو مس کریں تو مثلث کا حائط دائرہ مکافی کے ماسکہ میں سے گذریگا ۔

فرض کرو کہ مثلث ف ق ر کے ضلعے مکافی کو مس کرتے ہیں۔ ماسکہ س سے مثلث کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں ما$_1$، ما$_2$، ما$_3$

ہیں اور یہ دفعہ ۴۵ کی رُو سے راس ا پر کے مماس پر واقع ہیں -



یعنی ماسکہ س سے مثلث ف ق ر کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں ایک خطِ مستقیم میں واقع ہیں -

اس لیے مثلث ف ق ر کا حائط دائرہ ماسکہ س میں سے گزرتا ہے -

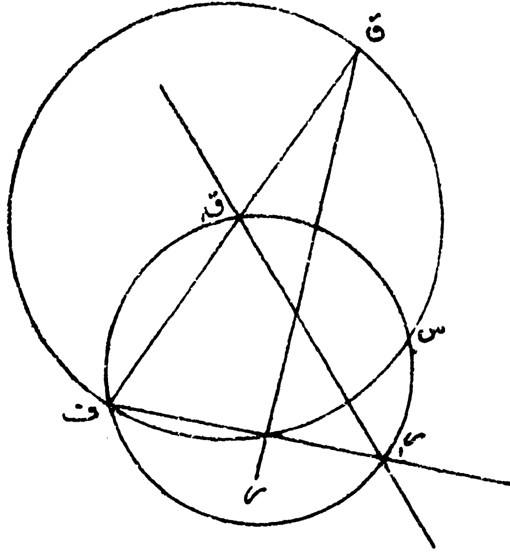
امثلہ ۱۱

(۱) اُس مکافی کے ماسکہ کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے مثلث کے تینوں ضلعوں (ممدودہ بشرطِ ضرورت) کو مس کرتا ہے -

(۲) ثابت کرو کہ بالعموم صرف ایک مکافی ایسا کھینچ سکتا ہے جو چار دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو (جن میں سے کوئی دو متوازی نہیں ہیں اور کوئی تین متراکز نہیں ہیں) مس کرتا ہے -

[فرض کرو کہ دیے ہوئے چار خطوں سے بننے والے چار مثلثوں میں سے دو مثلث ف ق ر اور ف ق ا ر ہیں، ان مثلثوں کے ضلعوں کو مس کرنے والے مکافی کا ماسکہ ان مثلثوں کے حائط دائروں کے دوسرے نقطۂ تقاطع س پر واقع ہوگا - اور س سے دیے ہوئے خطوط پر کے

عمودوں کے پائیں میں سے گذرنے والا خطِ مستقیم راس پر کا مماس ہوگا۔



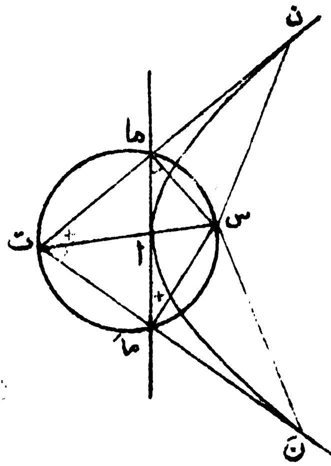
اب چونکہ ماسکہ اور رأس پر کا مماس معلوم ہیں اس لیے مکافی مرتسم ہوسکتا ہے]۔

نوٹ۔ علمِ ہندسۂ مستوی کی مدد سے ثابت ہوسکتا ہے کہ دیے ہوئے چار خطوط سے بننے والے چار مثلثوں کے حائط دائرے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ایک مثلث کے اضلاع مکافی کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز مکافی کے مرتب پر واقع ہوگا۔

[فرض کرو کہ مثلث ف ق ر کے اضلاع مکافی کو (جس کا ماسکہ س ہے) مس کرتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز و ہے، ہمیں معلوم ہے کہ بلحاظ مثلث ف ق ر کے س کا خط پائیں س و کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور چونکہ س کا خط پائیں مکافی کے رأس ا پر کا مماس ہے اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ و مکافی کے مرتب پر واقع ہے]۔

(۴) ایک مکافی کا ماسکہ س ہے اور مکافی پر کے نقاط ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ت ہے، ثابت کرو کہ مثلثات س ن ت اور س ت نَ متشابہ ہیں۔



[فرض کرو کہ مکافی کے راس ا پر کا مماس مماسات ت ن اور ت نَ سے بالترتیب ما اور مَا پر ملتا ہے، تب زاویے س ما ت اور س مَا ت دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے س، ما، ت، مَا مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ∠ س ت مَا = ∠ س ما مَا

لیکن دفعہ ۳۵ کی فرع (۱) کی رُو سے

∠ س ما مَا = ∠ س ن ما

اس لیے ∠ س ت نَ = ∠ س ن ت

اسی طرح سے ∠ س نَ ت = ∠ س ت ن

اس لیے مثلثات س ن ت اور س ت نَ متشابہ ہیں۔

(۵) اوپر کے سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر مکافی کے نقطوں ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ت ہو تو ∠ ت س ن = ∠ ت س نَ یعنی مکافی کے مماسوں کے مقابل ماسکہ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ (تقابلہ کرو دفعہ ۳۶ طریقہ دوم کا نوٹ)

(۶) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ س ت² = س ن × س نَ

(۷) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ $\frac{\text{ت ن}^2}{\text{ت نَ}^2} = \frac{\text{س ن}}{\text{س نَ}}$

(۸) سوال ۴ کی مدد سے اس مسئلہ کا متبادل ثبوت بہم پہنچاؤ کہ "مکافی کے کسی تین مماسوں سے بننے والے مثلث کا حائط دائرہ ماسکہ میں سے گزرتا ہے"

(۹) ط ن اور ط نَ مکافی کے دو مماس ہیں، ن ط کو کسی نقطہ ف تک خارج کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ∠ نَ ط ف = ∠ ن س ط یعنی مکافی کے کسی دو مماسوں کے درمیان کا خارجی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان میں سے کسی ایک مماس کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے۔

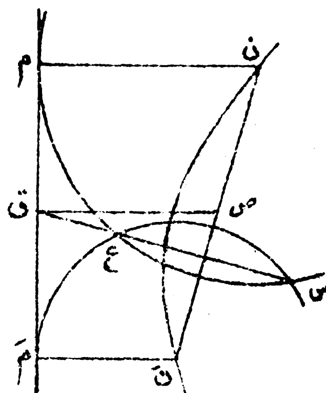
(۱۰) مکافی کا وتر ن نَ محور پر عمود وار ہے۔ کسی اور نقطہ پر کا مماس نقاط ن اور نَ پر کے مماسات سے ت اور تَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ س ت = س تَ

(۱۱) مکافی کے کسی مماس پر نقاط ت اور تَ ایسے لیے گئے ہیں کہ س ت = س تَ ثابت کرو کہ ت اور تَ سے مکافی کے دوسرے مماسات ایک دوسرے کو محور پر قطع کرتے ہیں۔

۳۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک مکافی کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو اِن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہوگا جو محور کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا کوئی ایک وتر ن نَ ہے،

مرتب پر عمود ن م اور نَ مَ نکالو اور ن، نَ کو مرکز مان کر بالترتیب
ن م اور نَ مَ کی دُوری پر دائرے کھینچو۔ یہ دائرے لازماً ماسکہ س میں
سے گزرینگے اور مرتب کو بالترتیب نقاط م اور مَ پر مس کرینگے۔



فرض کرو کہ دائروں (ن)، (نَ) کا دوسرا نقطۂ تقاطع ع ہے،
تب ان دائروں کا وترِ مشترک س ع مرکزوں کے خط ن نَ پر عمود وار
ہوگا۔

فرض کرو کہ ان دائروں کا وترِ مشترک س ع مرتب سے ق پر ملتا ہے

تب ق م^2 = ق ع × ق س = ق مَ^{2}

اس لیے ق م = ق مَ

یعنی م مَ کا وسطی نقطہ ق ہے۔

نیز چونکہ س ق عمود وار ہے ن نَ پر جس کی سمت متعین ہے اس لیے
ق ایک ثابت نقطہ ہے۔

اب ق میں سے ایک خط ق ص محور کے متوازی کھینچو جو وتر ن نَ
سے ص پر ملے۔ تب ظاہر ہے کہ ص وسطی نقطہ ہوگا ن نَ کا۔

اس لیے متوازی وتروں کے دیے ہوئے نظام کے کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ ص اس خطِ مستقیم پر ہوگا جو ثابت نقطہ ق میں سے گزرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔ یعنی مکافی کے متوازی وتروں کے کسی دیے ہوئے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو محور کے متوازی ہے۔

تعریف۔ مکافی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کو **قطر** کہتے ہیں اور جہاں یہ قطر مکافی کو قطع کرتا ہے اُس نقطہ کو **قطر کا سرا** کہتے ہیں۔

نوٹ۔ مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مکافی کا ہر قطر محور کے متوازی ہے۔

فرع۔ اگر مکافی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر مکافی سے ع پر ملے تو ع پر کا مماس اس نظام کے وتروں کے متوازی ہوگا۔

ع میں سے ایک خط اس نظام کے وتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط مکافی سے مکرر عَ پر ملتا ہے۔ تب ع عَ کا وسطی نقطہ قطر ع ص پر ہوگا یعنی ع عَ کا وسطی نقطہ ع ہوگا جو صرف اُسی صورت میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ عَ، ع پر منطبق ہو۔

اس لیے وہ خط جو ع میں سے گزرتا ہے اور نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ ع پر مکافی کا مماس ہے۔

یعنی مکافی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے قطر کے سرے پر کا مماس ان وتروں کے متوازی ہوگا۔

۳۹۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دُوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو دیے ہوئے وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مکافی کا ایک دیا ہوا وتر ن نَ ہے، ایک اور وتر ق قَ

وتر ن نَ کے متوازی کھینچو۔

فرض کرو کہ ن نَ اور ق قَ کے وسطی نقطے بالترتیب ص اور صَ ہیں۔ تب ص صَ میں سے گزرنے والا خط مکافی کا ایک قطر ہوگا۔

فرض کرو کہ ن ق قطر ص صَ سے ط پر ملتا ہے۔

تب (ص ط) / (صَ ط) = (ص ن) / (صَ ق)

لیکن ازروئے عمل ص ن = ص نَ اور صَ ق = صَ قَ

اس لیے (ص ط) / (صَ ط) = (ص نَ) / (صَ قَ)

اس لیے نَ قَ ط ایک خطِ مستقیم ہے۔

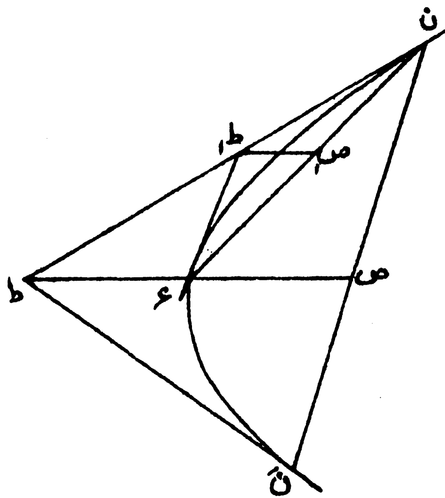
یعنی ن ق اور نَ قَ کا نقطۂ تقاطع ط، ص میں سے گزرنے والے قطر پر واقع ہے۔

اب فرض کرو کہ وتر ق قَ اپنے متوازی حرکت کرتا ہوا وتر ن نَ کے قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن نَ پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب انتہا میں ن ق اور نَ قَ بالترتیب ن اور نَ پر کے مماس بن جائینگے ۔

پس ثابت ہوا کہ وتر ن نَ کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو وتر ن نَ کی تنصیف کرنے والے قطر پر قطع کرتے ہیں ۔

+ **۴۰**۔ اگر مکافی کے کسی وتر ن نَ کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو ط پر قطع کریں اور ط میں سے گزرنے والا قطر مکافی سے ع اور ن نَ سے ص پر ملے تو ط ع = ع ص



ہمیں معلوم ہے کہ ط میں سے گزرنے والا قطر وتر ن نَ کی تنصیف کرتا ہے اور ع پر کا مماس ن نَ کے متوازی ہے ۔ [بموجب دفعات ۳۸، ۳۹]

فرض کرو کہ ع پر کا مماس، ن ط سے ط۱ پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ ط۱ میں سے گزرنے والا قطر ن ع سے ص۱ پر ملتا ہے۔

تب دفعہ ۳۸ کی فرع کی رُو سے ن ع کا وسطی نقطہ ص۱ ہوگا۔

اب مثلث ن ع ط میں ص ط۱ ایک خط ہے جو ن ع کے وسطی نقطہ ص۱ میں سے گزرتا ہے اور ع ط کے متوازی ہے۔

اس لیے ن ط۱ = ط۱ ط

اب مثلث ن ص ط میں ط۱ ع ایک خط ہے جو ن ط کے وسطی نقطہ ط۱ میں سے گزرتا ہے اور ن ص کے متوازی ہے۔

اس لیے ط ع = ع ص

امثلہ ۱۲

(۱) مکافی کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہے۔ ان وتروں میں سے ہر ایک کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ مکافی کے ماسکہ میں سے مکافی کے کسی وتر پر کا عمود اور اس وتر کی تنصیف کرنے والے قطر کا نقطۂ تقاطع مرتب پر ہوتا ہے۔

(۳) اگر مکافی کے متوازی وتروں میں سے ہر ایک محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے تو ان وتروں کی تنصیف کرنے والا قطر وترِ خاص کے ایک سرے میں سے گزریگا۔

(۴) ایک مکافی کاغذ پر کھنچا ہوا ہے۔ اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

کوئی دو متوازی وتر ن نَ اور ق قَ کھینچو۔

تب اِن کے وسطی نقطوں ص، ص۱ میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

ن سے ص ص۱ پر عمود نکالو اور اسے اِتنا خارج کرو کہ یہ مکرر مکافی سے ن۱ پر ملے۔

ن ن۱ کے وسطی نقطہ ع میں سے ص ص۱ کے متوازی خط کھینچو جو مکافی سے ا پر ملے، تب ا مکافی کا راس ہوگا اور ا ع محور ہوگا۔

ع ن کو ف تک اتنا خارج کرو کہ ع ف = ۲ ا ع

اف اور مکافی کا نقطۂ تقاطع خ وترِ خاص کا ایک سرا ہوگا

کیونکہ $\frac{\text{س خ}}{\text{س ا}} = \frac{\text{ع ف}}{\text{ع ا}} = ۲$ ، ا ع پر عمود خ س کھینچنے سے

ا س کا س معلوم ہو سکتا ہے ۔ اب محور پر نقطہ لا ایسا لو کہ

ا لا = ا س

تب لا میں سے محور پر عمود دار خطِ مکافی کا مرتب ہوگا۔

نوٹ :۔ ضابطہ ع ن^{۲} = ۴ ا س × ا ع کی مدد سے بھی ا س کا

طول حاصل ہو سکتا ہے جس سے ماسکہ اور مرتب معلوم ہو سکتے ہیں۔

(۵) ن س نَ مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور راس ا میں سے وتر ا ق کھینچا گیا ہے جو ن نَ کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ

س ن ✕ س نَ = ا ق

(۶) اگر سوال بالا میں ن ع اور نَ عَ محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ ع عَ = ا ق

(۷) مکافی کے کوئی دو وتر محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے وسطی نقطے محور سے متساوی الفصل ہیں۔

(۸) ن س نَ مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن نَ کی تنصیف کرنے والا قطر مکافی سے ۶ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن نَ = ۴ س ۶

[ماسکی وتروں کے سروں ن، نَ پر کے مماس ایک دوسرے کو

مرتب پر کے ایک نقطہ ے پر عموداً قطع کرتے ہیں۔ اور ن نَ کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرنے والا قطر بھی ے میں سے گزرتا ہے۔ نیز ص ۶ = ۶ ے

قائم الزاویہ مثلث ے ن نَ میں

ن نَ = ۲ ص ے = ۴ ع ے = ۴ س ع

(۹) سوال ۸ کی مدد سے مکافی کا ایک ماسکی وتر کھینچو جس کا طول معلوم ہو۔

(۱۰) اگر مکافی کے دو ماسکی وتر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یہ محور کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۱) مکافی کا وترِ خاص سب سے چھوٹا ماسکی وتر ہے۔

(۱۲) مکافی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع اور عمادوں کے نقطۂ تقاطع کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوتا ہے۔

(۱۳) مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد مکافی سے مکرر نَ پر ملتا ہے۔ ن، نَ پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع ت میں سے گزرنے والا قطر مکافی سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ق ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

(۱۴) ن نَ اور ق قَ مکافی کے دو متوازی وتر ہیں، ن اور نَ پر کے مماسات ق قَ ممدودہ سے ت اور تَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ق ت = قَ تَ

امثلہ ۱۳

(مکافی پر متفرق سوالات)

(۱) اگر مکافی کے ایک وتر کا طول اس وتر کے وسطی نقطہ اور مرتب کے درمیانی فاصلہ کا دوچند ہو تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ماسکہ میں سے گزریگا۔

(۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ا ب پر ایک متساوی الساقین مثلث ا ب م بنایا گیا ہے اور قاعدہ ا م پر ایک اور متساوی الساقین مثلث ا م ن مثلث ا ب م کے متشابہ بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکافی ہے جس کا ماسکہ ا ہے، اور جس کا مرتب ا ب کا

عمودی منصف ہے۔

(۳) ا ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک ثابت خط پر کوئی نقطہ ق ہے ق سے ثابت خط پر عمود ق ن کھینچا گیا ہے اور ا ن عمود ہے ا ق پر ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکافی ہے جس کا راس ا ہے۔

(۴) ن س نَ مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے اور ن اور نَ میں سے محور کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو نَ اور ن پر عمادوں سے بالترتیب ق، قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن نَ قَ ق ایک معین ہے۔

[اشارہ - چونکہ ن س نَ ایک ماسکی وتر ہے اس لیے ن اور نَ پر کے مماسات علی القوائم ہیں۔ اس لیے نَ پر کا عماد ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔ اس لیے ∠ ن نَ ق = ∠ ن ق نَ یعنی ن ق = ن نَ اسی طرح نَ قَ = ن نَ]

(۵) ایک مکافی بناؤ جو تین دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور جس کا ماسکہ ایک دیے ہوئے خط پر ہو۔

(۶) ثابت کرو کہ مکافی کے دو ثابت مماسوں اور ایک متغیر مماس سے بننے والے مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۷) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر راس ا سے عمود نکالا گیا ہے جو ن میں سے گزرنے والے اور محور کے متوازی خط سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکافی کے محور پر عمود وار ہے۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ن پر کا مماس محور سے ت پر ملتا ہے۔ ن اور ق سے محور پر عمود ن ع، ق م نکالو۔ تب مثلثات ن ت ع، اور ا ق م متشابہ ہونگے۔ اس لیے ام × ع ت = ن ع^2 = ۴ ا س × ا ع

اس لیے ا م = ۲ ا س]

(۸) مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ مکافی کے اس معین کے مساوی ہے جو ن گ کی تنصیف کرتا ہے۔

[اشارہ ۔ فرض کرو کہ ن گ کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والا معیّن مکافی سے ر پر اور محور سے م پر ملتا ہے ۔ ن سے محور پر عمود ن ع نکالو۔ تو ع م = ½ ع گ = ا س

اب ر م² = ۴ ا س × ا م = ۴ ا س × ا ع + ۴ ا س²

= ن ع² + ع گ² = ن گ²]

(۹) مکافی کا کوئی نقطہ ن ہے اور ماسکہ س سے ا ن پر کا عمود راس پر کے مماس سے ر پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن کا معیّن ۴ ا ر کے مساوی ہے ۔

(۱۰) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کا معیّن ن ع ہے اور ن پر کا مماس راس پر کے مماس سے ما پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ما ع ہمیشہ ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے مکافی کے مساوی ہے ۔

[اشارہ ۔ ما ع پر عمود وار ما سَ کھینچو جو محور سے سَ پر ملے ۔ ثابت کرو کہ ا سَ = ا س]

(۱۱) ن س نَ اُس مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے جس کا راس ا ہے اور ا ن اور ا نَ وترِ خاص سے ک اور کَ پر ملتے ہیں ۔ اگر ن ع اور نَ عَ محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ ع ن س کَ اور عَ نَ س ک دونوں متوازی الاضلاع ہیں

[اشارہ ۔ $\frac{\text{س ک}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{۴ ا س}}{\text{ع ن}}$ ،

یعنی ع ن × س ک = ۴ ا س² ، لیکن امثلہ سوال (۲۰) کی رُو سے ع ن × عَ نَ = ۴ ا س² ۔ اس لیے س ک = عَ نَ اسی طرح سے س کَ = ع ن]

(۱۲) دو مکافیوں کا ماسکہ مشترک ہے اور ان کے مشترک مماس پر کے کسی نقطہ سے مکافیوں کے دوسرے مماسات کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان آخرالذکر مماسوں کا درمیانی زاویہ مکافیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے

مساوی ہے ۔

(۱۳) متعدد مکافی کھینچے گئے ہیں جو ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں اور جن کا مرتب ایک دیا ہوا خط ہے۔ بتاؤ کہ ان میں سے ہر ایک مکافی ایک اور ثابت مکافی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ دیا ہوا نقطہ ن ہے ۔

[اشارہ۔ دیے ہوئے نقطہ ن سے دیے ہوئے مرتب م لا پر عمود ن م نکالو اور ن م ممدودہ پر نقطہ ل ایسا لو کہ م ل = ن م اور ل میں سے دیے ہوئے مرتب کے متوازی ل لَ کھینچو۔ فرض کرو کہ مکافیوں کے دیے ہوئے نظام کے کسی ایک رکن کا ایک ماسکی وتر ن س نَ ہے ۔ نَ سے ل لَ پر عمود نَ لَ نکالو اور ثابت کرو کہ نَ ن = نَ لَ یعنی نَ اُس مکافی کا ایک نقطہ ہے جس کا ماسکہ ن اور مرتب ل لَ ہے نیز چونکہ ان دونوں مکافیوں کے نقطہ نَ پر کا مماس زاویہ ن نَ لَ کا اندرونی منصِّف ہے، اس لیے یہ دونوں مکافی ایک دوسرے کو نَ پر مس کرتے ہیں]

(۱۴) مکافی کے نقطہ ن پر کا مماس محور سے ط پر ملتا ہے اور ن ق ایک وتر ہے جو محور کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو ن پر کا مماس بناتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن ق = ۴ ن ط ۔

(۱۵) ایسے مکافی کھینچے گئے ہیں جن کا مشترک راس ا ہے اور جو ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکافیوں کے مرتبوں کا لفاف ایک مکافی ہے جس کے وترِ خاص کا طول ا ن کے مساوی ہے ۔

[اشارہ۔ ا سے ا ن پر عمود ا ل کھینچو جو دیے ہوئے نظام کے ایک مکافی کے مرتب سے ل پر ملے اور ل میں سے محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ا ن سے و پر ملے۔ ثابت کرو کہ لا ل = ۱/۴ ع ن اور ا و = ۱/۴ ا ن]

(۱۶) ایک دیے ہوئے قاعدہ ا ب پر ایک متساوی الساقین مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے ۔ اور ا اور ج پر مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کے مماس ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ن کا طریق ایک مکافی ہے جس کا ماسکہ ا، محور اب، پر ہے، اور جس کے وترِ خاص کا طول اب کے مساوی ہے۔

(۱۷) ایک متغیر دائرہ جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ س ہے دو ثابت متوازی خطوط کو بالترتیب ا، اَ اور ب، بَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط اب، ابَ، اَب، اَبَ ایک ثابت مکافی کو مس کرتے ہیں۔

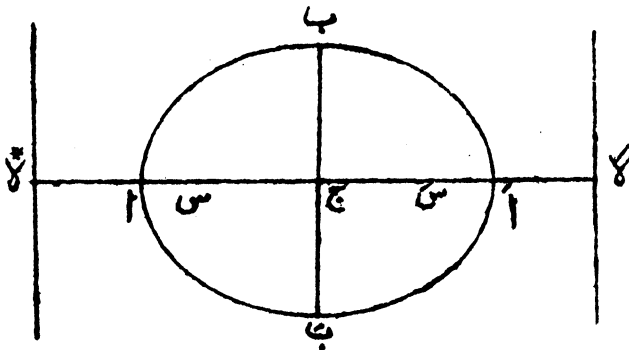
(۱۸) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کے معین ن ع پر نقطہ ق اس طرح لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{ع ق}}{\text{ع ن}}$ = مستقل، ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک اور مکافی ہے۔



تیسرا باب

ناقِص

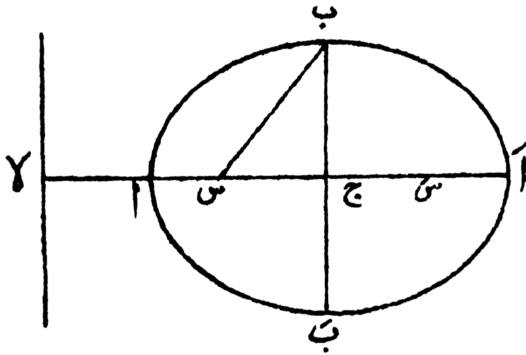
۱۴۔ دفعہ (۱) کی تعریف کے بموجب ناقص ایک مخروطی ہے جس کا خروج المرکز ز < ۱۔ پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ناقص ایک بند بیضوی منحنی ہے جس کے دو تشاکل کے محور ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز ج پر عمودوار قطع کرتے ہیں اور جن میں سے ایک محور ا اَ مرتب پر عمودوار ہے۔



اور دوسرا محور ب بَ مرتب کے متوازی ہے۔ نیز محور ا اَ پر دو ماسکے
س اور سَ واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب ہیں جو ا اَ
پر عمود وار ہیں اور ا اَ ممدودہ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب
لا اور لاَ پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج س : ج ا = ج ا : ج لا = ز
ماسکوں میں سے گزرنے والے محور کے سرے ا اور اَ ناقص کے راس
کہلاتے ہیں۔

۴۲۔ **مسئلہ**۔ محور ب بَ چھوٹا ہے محور ا اَ سے
اور ج ب٢ = ج ا٢ - ج س٢

دفعہ ۸ کی رو سے س ب = ز × ج لا = ج ا (بموجب نتیجہ ۳ دفعہ ۵)



اب قائم الزاویہ مثلث س ج ب میں
ضلع ج ب < وتر س ب = ج ا
اس لیے ب بَ < ا اَ
نیز ج ب٢ = س ب٢ - ج س٢ = ج ا٢ - ج س٢

نوٹ (۱) چونکہ ماسکوں میں سے گذرنے والا محور ا اَ بڑا ہے محور ب بَ سے
اس لیے ناقص میں ا اَ کو محورِ اعظم اور ب بَ کو محورِ اصغر

کہتے ہیں۔

ترقیم ۔ نیم محورِ اعظم ج ا کے طول کو بالعموم ا سے اور نیم محورِ اصغر ج ب کے طول کو بالعموم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ (۲) چونکہ ج س = ز × ج ا

اس لیے رشتہ ج ب^2 = ج ا^2 - ج س^2 ہوجاتا ہے

ج ب^2 = ج ا^2 (۱ - ز^2)

یعنی اوپر کی ترقیم کے مطابق ب^2 = ا^2 (۱-ز^2)

اس رشتہ کی مدد سے اگر مقادیر ا،ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں تو تیسری مقدار معلوم ہوسکتی ہے۔

نوٹ (۳) ا س × س ا َ = (ج ا - ج س) (ج ا + ج س)

= ج ا^2 - ج س^2

= ج ب^2

نوٹ (۴) چونکہ بموجب نتیجہ ۱ دفعہ ۵

ج ا^2 = ج س × ج ل

اس لیے ج ب^2 = ج س × ج ل - ج س^2

= ج س [ج ل - ج س]

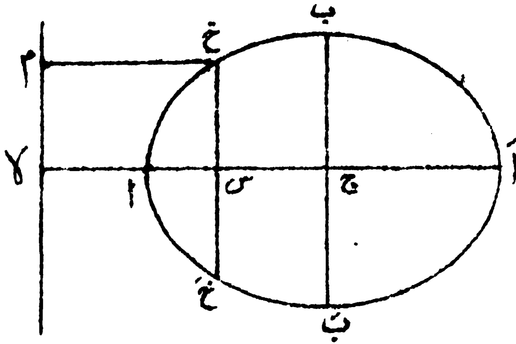
= ج س × س ل

+ ۴۳۔ **مسئلہ** ۔ ناقص کا نیم وترِ خاص، نیم محورِ اعظم اور نیم محورِ اصغر کا تیسرا متناسب ہے یعنی $\frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}}$ = $\frac{\text{ج ب}}{\text{س خ}}$

وترِ خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

چونکہ خ ناقص پر کا نقطہ ہے اس لیے $\frac{\text{س خ}}{\text{خ م}}$ = ز

= $\frac{\text{ج س}}{\text{ج ا}}$



یعنی س خ × ج ا = ج س × خ م

= ج س × س ہ

= ج ب^2 (بموجب نوٹ ۴ دفعہ ۴۲)

اس لیے $\frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{س خ}}$

نوٹ:- مسئلہ بالا میں ضمناً حاصل ہوا کہ نیم وترِ خاص س خ = $\frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}}$

اگر حسب معمول نیم وترِ خاص کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{ل} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$$

امثلہ ۱۴

(۱) ناقص کے ایک محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی مخالف جانبوں میں دو خط کھینچے گئے ہیں جو محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان خطوط کے طول مساوی ہیں ۔ نیز اس کا عکس بیان کرو اور اسے بھی ثابت کرو ۔

(۲) اگر دو مساوی ناقصوں کا مرکز ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ ان کے نقاطِ تقاطع دو علی القوائم قطروں کے سروں پر ہونگے ۔

(۳) دفعات ۷ اور ۸ کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو کہ ناقص کُلیتہً اُن خطوط کے درمیان واقع ہے جو راسوں ا ' اَ میں سے محور ا اَ پر عمود وار ہیں ۔

(۴) اگر نقطہ ن ناقص پر راس ا سے راس اَ تک حرکت کرے تو ثابت کرو کہ ماسکی فاصلہ س ن کا طول س ا سے س اَ تک بڑھتا ہے ۔

(اشارہ ۔ اگر ن سے ا اَ پر عمود ن ع ہو تو س ن = ز × ع لا اورع لا کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ا لا ہے اور بڑی سے بڑی قیمت اَ لا ہے) ۔

(۵) اگر ایک مکافی اور ایک ناقص کے ماسکہ اور مرتب مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ مکافی کُلیتہً ناقص کے باہر واقع ہوگا ۔

(۶) ناقص کے محورِ اعظم کے سرے ا ' اَ اور ماسکہ س کے مقام معلوم ہیں ۔ ناقص کا خروج المرکز اور محورِ اصغر کا طول معلوم کرو ۔

(۷) ثابت کرو کہ س س٘ ^{2} = ا اَ ^{2} - ب بَ ^{2}

(۸) اگر ∠ س ب س٘ قائمہ ہو تو ناقص کا خروج المرکز معلوم کرو ۔

(۹) ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو محورِ اصغر کے ایک سرے ب میں سے گزرتا ہے اور محورِ اعظم کو ماسکہ س پر مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا قطر = $\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}}$

(۱۰) ناقص کے محورِ اعظم کے سرے ا ' اَ معلوم ہیں ۔ ثابت کرو کہ ماسکہ س میں سے گزرنے والے وترِ خاص کے سروں خ ' خَ کا طریق ایک مکافی ہے جس کا محور ا اَ کے عمودی ناصف پر ہے ۔

۴۴ ۔ تعریف ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن سے محورِ اعظم پر عمود ن ع ہو تو ن ع کو ن کا معیّن کہتے ہیں ۔

مسئلہ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہو تو

$$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$$

فرض کرو کہ ن ا اور ن اَ ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے بالترتیب ک اور کَ پر ملتے ہیں۔ س ک اور س کَ کو ملاؤ اور ن س کو ملا کر کسی نقطہ نَ تک خارج کرو۔

تب متشابہ مثلثات ا ن ع اور ا ک لا سے

$$\frac{\text{ع ن}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ک لا}}{\text{ا لا}} \qquad (۱)$$

نیز متشابہ مثلثات اَ ن ع اور اَ کَ لا سے

$$\frac{\text{ع ن}}{\text{ع اَ}} = \frac{\text{کَ لا}}{\text{اَ لا}} \qquad (۲)$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}} = \frac{\text{ک لا} \times \text{کَ لا}}{\text{ا لا} \times \text{اَ لا}} \qquad (۳)$$

نیز س ک اور س کَ بالترتیب زاویوں ا س ن اور اَ س ن کے منصِف ہیں (بموجب دفعہ ۱۱)۔

اس لیے زاویہ ک س کَ قائمہ ہے

لہٰذا $\text{ک لا} \times \text{کَ لا} = \text{س لا}^2$ . . . . (۴)

اِس لیے رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}} = \frac{\text{س لا}^2}{\text{ا لا} \times \text{لا اَ}}$$

لیکن $\frac{\text{س لا}^2}{\text{ا لا} \times \text{لا اَ}}$ ایک مستقل مقدار ہے۔

اس لیے $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}}$ کی قیمت ن کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اب اُس خاص صورت میں جبکہ نقطہ ن محور اصغر کے سرے ب پر منطبق ہو،

$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}}$ ہو جاتا ہے $\frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$

پس ثابت ہوا کہ $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$

نوٹ (۱) چونکہ $\text{ا ع} \times \text{ع اَ} = (\text{ج ا} - \text{ج ع})(\text{ج ا} + \text{ج ع}) = \text{ج ا}^2 - \text{ج ع}^2$

اِس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ا}^2 - \text{ج ع}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ج ا}^2 - \text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2}$$

$$= 1 - \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2}$$

یعنی $\frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2} + \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ب}^2} = 1$ . . . . (۱)

اب اگر ا ج اَ اور ب ج بَ کو حوالہ کے محور مانا جائے اور نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو ج ع = لا (فصلہ) اور ع ن = ما (معیّن) اور نتیجہ بالا (۱) ہو جاتا ہے: $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ . . . . (۲)

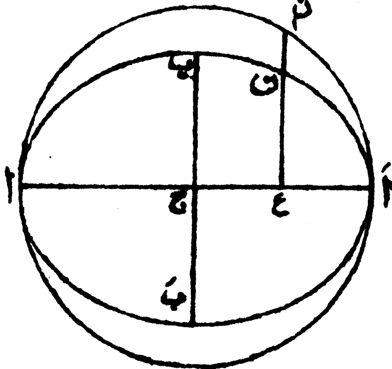
چونکہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) اس رشتہ (۲) کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ رشتہ یعنی $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ ناقص کی مساوات ہے۔

نوٹ (۲) اگر (لا، ما) ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ پر کا ایک نقطہ ہو تو نقاط (لا، ـ ما) اور (ـ لا، ما) بھی ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ نقطے بھی ناقص پر واقع ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ ناقص حوالہ کے دونوں محوروں اا' اور ب ب' کے لحاظ سے متشاکل ہے۔ اس طریقہ سے اس امر کا متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ "ناقص بلحاظ دو علی القوائم محوروں کے متشاکل ہے۔"

نوٹ (۳) ناقص کی مساوات $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ لا کی عددی قیمت بڑی نہیں ہو سکتی ا سے اور ما کی عددی قیمت بڑی نہیں ہو سکتی ب سے یعنی ناقص کا کوئی نقطہ اس مستطیل کے باہر نہیں ہے جو ا، ا' میں اا' پر عمود وار خطوط اور ب، ب' میں سے ب ب' پر عمود وار خطوط کھینچنے سے بنتا ہے۔

۴۵۔ **مسئلہ**۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہو اور ع ن ممدودہ اا' کے قطر پر کے دائرہ کو ن, پر قطع کرے تو

$$\frac{ن ع}{ن_۱ ع} = \frac{ج ب}{ج ا}$$



دفعہ ۴۴ کی رو سے

$$\frac{ن ع^۲}{اع \times ع ا'} = \frac{ج ب^۲}{ج ا^۲}$$

اور $ن_۱ ع^۲ = اع \times ع ا'$

$$\therefore \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ن}_1\text{ع}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$$

اس لیے $$\frac{\text{ن ع}}{\text{ن}_1\text{ع}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$$

نوٹ ۔ اوپر کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ا اَ قطر والے دائرہ پر کے کسی نقطہ ن، کے معین ن، ع پر ایک نقطہ ن ایسا لیا جائے کہ $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن}_1\text{ع}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$ تو ن کا طریق وہ ناقص ہوگا جس کا محورِ اعظم ا اَ ہے اور محورِ اصغر ب بَ ہے ۔

تعریفات (۱) ناقص کے محورِ اعظم ا اَ کے قطر پر کھینچے ہوئے دائرہ کو ناقص کا **امدادی دائرہ** کہتے ہیں ۔ اس کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ امدادی دائرہ کی مدد سے مندرجۂ بالا نوٹ کے طریقہ کے مطابق ناقص حاصل ہو سکتا ہے ۔

(۲) اگر خط ع ن ن، محورِ اعظم پر عمود ہو اور ناقص سے ن پر اور امدادی دائرہ سے ن، پر ملے تو نقاط ن اور ن، متناظر نقطے کہلاتے ہیں ۔

امثلہ ۱۵

(۱) ناقص کے ایک نقطہ ن کا معین ن ع ہے ۔ ثابت کرو کہ جیسے ع راس ا سے مرکز ج تک حرکت کرتا ہے معین ن ع کی قیمت مسلسل بڑھتی ہے ۔

(۲) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن سے محورِ اصغر ب بَ پر عمود ن ع ہو تو ثابت کرو کہ $$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ب ع} \times \text{ع بَ}} = \frac{\text{ج ا}^2}{\text{ج ب}^2}$$

(۳) ا اَ ایک محدود خطِ مستقیم ہے اور ایک متحرک نقطہ ن سے ا اَ پر عمود ع ن ہے اگر $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع اَ}}$ ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا ایک محور ا اَ ہے ۔

(۴) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے معین ن ع پر نقطہ ق اس طرح

لیا جائے کہ $\frac{\text{ع ق}}{\text{ع ن}}$ = مستقل تو ق کا طریق ایک اَور ناقص ہوگا۔

(۵) دفعہ ۴۴ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص کے نیم وترِ خاص کا طول = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$

(۶) ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے، ع ن محدودہ پر نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{ع ق}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}}$، ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر ا اَ ہے۔

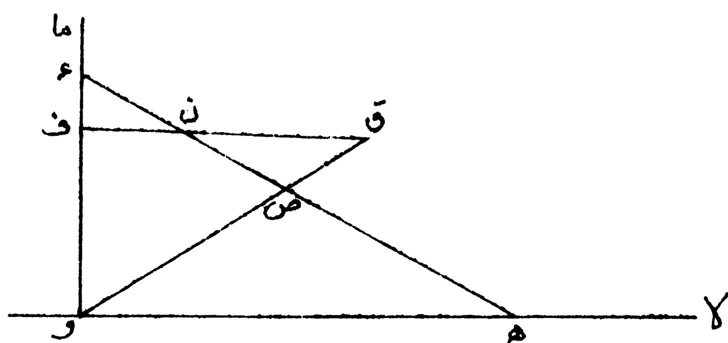
(۷) دائرہ (ج) کے ایک ثابت قطر ا اَ پر دائرہ کے کسی نقطہ ن_1 سے ن_1 ع عمود کھینچا گیا ہے۔ اور ع ن_1 پر ایک نقطہ ن ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع ن}_1} = \frac{3}{5}$، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المرکز $\frac{4}{5}$ ہے۔

(۸) دفعہ ۴۵ کے مسئلہ کی شکل میں اگر زاویہ ع ج ن_1 = ط تو ثابت کرو کہ ناقص پر کے نقطہ ن کے عمود (ا جم ط، ب جب ط) ہیں۔

(۹) دفعہ ۴۵ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص بلحاظ ب ج بَ کے (جو ج میں سے گزرتا ہے اور ا اَ پر عمود وار ہے) تشاکل ہے اور نیز اُس کا ایک اَور ماسکہ اور اُس ماسکہ کے جواب کا مرتب ہے۔

(۱۰) اگر ایک سلاخ ھ ع اس طرح حرکت کرے کہ اُس کے سرے ھ اور ع بالترتیب دو علی القوائم سلاخوں و لا، و ما پر رہیں تو ثابت کرو کہ سلاخ پر کے کسی ثابت نقطہ ن کا طریق ایک ناقص ہوگا جس کے نصف محوروں کے طول ن ھ اور ن ع ہیں۔

فرض کرو کہ سلاخ ھ ع کا وسطی نقطہ ص ہے،



ن سے وما پر عمود ن ف نکالو اور فرض کرو کہ ف ن اور وص کا نقطۂ تقاطع ق ہے۔

ظاہر ہے کہ ص و = ص ہ اور ص ق = ص ن

اس لیے وق = ن ہ جو مستقل ہے۔

اس لیے ق کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ن ہ کے مساوی ہے۔

نیز متشابہ مثلثات ن ف ع اور ق ف و میں

$$\frac{ن ف}{ق ف} = \frac{ن ع}{ق و} = \frac{ن ع}{ن ہ}$$ جو مستقل ہے۔

اس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے نصف محوروں کے طول ن ہ اور ن ع ہیں۔

نوٹ (۱)۔ مندرجۂ بالا طریقہ سے حیلی طور پر ایک سلاخ کی مسلسل حرکت سے ناقص مرتسم ہوسکتا ہے۔ یہی ناقصی پرکار کا اصول ہے۔

نوٹ (۲)۔ مندرجۂ بالا شکل میں نقطہ ن سلاخ پر ہ اور ع کے درمیان لیا گیا ہے۔ اگر ن سلاخ ممدودہ پر لیا جائے تو بھی طریق ناقص ہوگا۔ طالب علم مناسب شکل کھینچ کر اس امر کی تصدیق کرے۔

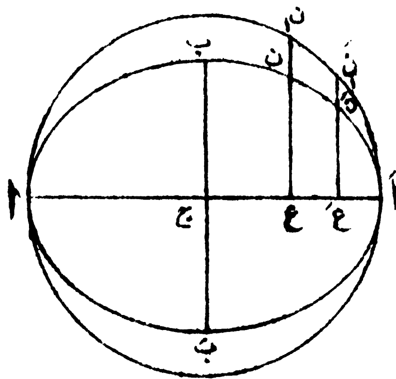
(۱۱) ناقص پر کوئی دو نقطے ن اور نَ ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے متناظر نقطے نٖ اور نَٖ ہیں - ثابت کرو کہ ن نَ اور نٖ نَٖ کا نقطۂ تقاطع محورِ اعظم ممدودہ پر ہے -

(۱۲) سوال بالا کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطوں ن اور نٖ پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ۱ اَ ممدودہ پر ہے -

(۱۳) دائرہ کے متوازی وتروں کے نظام کے کسی ایک وتر ق قَ پر ایک نقطہ ن ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{ق ن}}{\text{ن قَ}}$ مستقل ہے - ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے -

[فرض کرو کہ دائرہ کا وہ قطر جو ق قَ پر عمود ہے ق قَ سے ع پر ملتا ہے، تب چونکہ $\frac{\text{ق ن}}{\text{ن قَ}}$ مستقل ہے اس لیے $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع قَ}}$ بھی مستقل ہوگا اس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے]

(۱۴) ناقص کے نیم محوروں کے طول ا اور ب ہیں - ثابت کرو کہ ناقص کا



رقبہ π ا ب ہے - ناقص پر ایک دوسرے کے قریب کے کسی دو نقطوں ن، نَ سے

محورِ اعظم پر عمود ن ع اور نَ عَ نکالو اور فرض کرو کہ ع ن اور عَ نَ ممدودہ امدادی دائرہ سے بالترتیب ن۱ اور نَ۱ پر ملتے ہیں۔

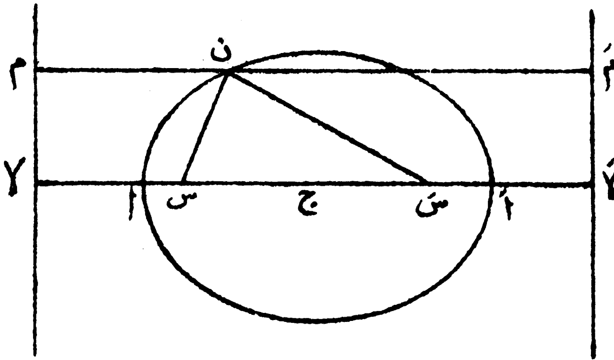
$$\text{اب}\quad \frac{\text{شکل ع عَ نَ ن کا رقبہ}}{\text{شکل ع عَ نَ۱ ن۱ کا رقبہ}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ع ن۱}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اب محورِ اعظم پر عمود وار بہت سے خطوط کھینچ کر ناقص اور امدادی دائرہ کو ایسی بے شمار متناظر پٹیوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی (مثلاً ع عَ) بہت چھوٹی ہو۔ جیسا کہ اوپر بتایا جا چکا ہے۔ ناقص کی ہر پٹی کے رقبہ کو امدادی دائرہ کی متناظر پٹی کے رقبہ کے ساتھ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے، نیز ناقص کی جملہ پٹیوں کا مجموعہ ناقص کا رقبہ ہے اور امدادی دائرہ کی متناظر پٹیوں کا مجموعہ امدادی دائرہ کا رقبہ ہے۔

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{ناقص کا رقبہ}}{\text{امدادی دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

یعنی ناقص کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ × امدادی دائرہ کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \times \pi \text{ا}^2 = \pi \text{ ا ب}$

۴۶۔ **مسئلہ**۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور محورِ اعظم کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

ن س + ن سَ = ا اَ

ن میں سے س کے متناظر مرتب پر عمود ن م اور سَ کے متناظر مرتب پر عمود ن مَ نکالو۔ تب م ن مَ خطِ مستقیم ہوگا۔

ناقص کی تعریف کے بموجب

ن س = ز × ن م

اور ن سَ = ز × ن مَ

اس لیے ن س + ن سَ = ز (ن م + ن مَ)

= ز × م مَ = ز × ۲ لا

= ز × ۲ ج لا

= ۲ ج ا (بموجب دفعہ ۵ نتیجہ ۳)

= ا اَ

نوٹ ۔ اس مسئلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے ناقص مرتسم کرنے کا مندرجۂ ذیل عملی طریقہ حاصل ہوتا ہے ۔

محدود طول والی ایک بے لچک رسّی کے سروں کو دو ثابت نقطوں س اور سَ پر کی دو کھونٹیوں کے ساتھ باندھ دو۔ ایک پنسل کو اس طرح حرکت دو کہ پنسل کی نوک سے رسّی ہمیشہ تنی رہے، تب پنسل کی نوک ایک ناقص مرتسم کریگی، کیونکہ اگر پنسل کی نوک کا کوئی ایک مقام ن ہو تو ن س + ن سَ = رسی کا طول جو مستقل ہے۔ اِس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے ماسکے س اور سَ ہیں اور جس کے محورِ اعظم کا طول رسّی کے طول کے مساوی ہے۔

امثلہ ۱۶

(۱) اگر ناقص کی سطح میں کوئی نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ق س + ق سَ بڑا ہوگا ا اَ سے، اگر ق ناقص کے باہر ہو اور چھوٹا ہوگا ا اَ سے، اگر ق ناقص کے اندر ہو۔

(۲) ن ج نَ ناقص کا کوئی قطر ہے، ثابت کرو کہ س ن + س نَ

مستقل ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص کا محورِ اعظم ناقص کا سب سے بڑا وتر ہے۔

[فرض کرو کہ ناقص کا کوئی وتر ن نَ ہے،

تب ن نَ < س ن + س نَ نیز ن نَ < سَ ن + سَ نَ سے

اس لیے ۲ ن نَ < (س ن + سَ ن) + (س نَ + سَ نَ) = ۱۱ + ۱۱َ = ۲ ۱۱َ

اس لیے ن نَ < ۱۱َ]

(۴) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اُس نقطہ کا طریق جو دونوں دائروں کے محیطوں سے متساوی الفصل ہو ایک ناقص ہے۔

(اشارہ۔ دائروں کے مرکزوں سے متحرک نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ دائروں کے نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہے)۔

(۵) اگر ناقص پر کا ایک نقطہ، ایک ماسکہ اور محورِ اعظم کا طول معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۶) سوال ۵ میں ثابت کرو کہ ناقص کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۷) دو ناقصوں کا ایک ماسکہ مشترک ہے۔ اور ان کے محورِ اعظم کے طول مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ناقص دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرسکتے۔

(۸) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر ماسکوں کو ملانے والے خط س سَ کے محاذی بننے والا زاویہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ نقطۂ مذکور محور اصغر کے کسی سرے پر ہو۔

(۹) ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ∠ س ن سَ کا خارجی ناصف ناقص کو مکرر قطع نہیں کرسکتا۔ اس سے مستنبط کرو کہ ∠ س ن سَ کا خارجی ناصف نقطہ ن پر ناقص کا مماس ہے۔

(۱۰) اگر مثلث س ن سَ کا اندرونی دائرہ س ن کو ع پر مس کرے تو ثابت کرو کہ ن ع کا طول مستقل ہے۔

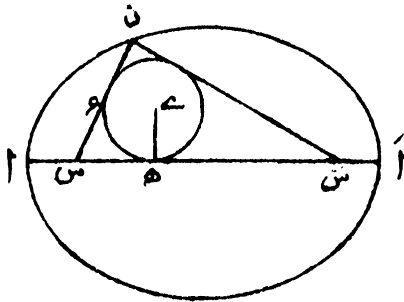
(۱۱) اگر س ن سَ کا اندرونی دائرہ س سَ کو ھ پر مس کرے تو ثابت کرو کہ ۱ ھ = س ن ۔

(۱۲) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے - اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو اِن دونوں دائروں کو مس کرتا ہے (دیکھو سوال ۴ امثلہ ہذا)

(۱۳) ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ مثلث س ن سَ کے اندرونی دائرہ کے مرکز کا طریق ایک ناقص ہے۔

[فرض کرو کہ مثلث س ن سَ کا اندرونی دائرہ ن س کو ع پر اور س سَ کو ھ پر مس کرتا ہے - نیز فرض کرو کہ مثلث س ن سَ کا اندرونی مرکز ے ہے
چونکہ ن س + ن سَ = ۲ ا اور س سَ = ۲ ا ز، اس لیے مثلث س ن سَ کا احاطہ = ۲ ا (۱ + ز) علم مثلث کے مشہور ضابطوں

$$\triangle = \sqrt{\text{ن}\,(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}$$



اور ر = $\frac{\triangle}{\text{ن}}$ سے حاصل ہوتا ہے کہ مثلث س ن سَ کے اندرونی دائرہ کا

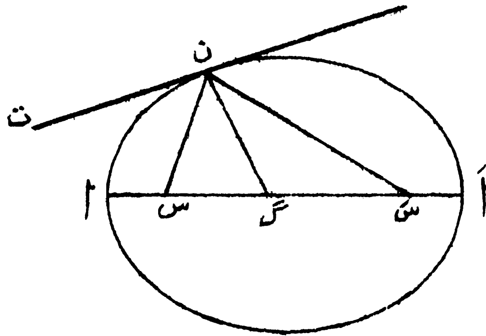
$$\text{نصف قطر ے ھ} = \frac{\text{مثلث س ن سَ کا رقبہ}}{\text{ا}\,(1+\text{ز})}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{ا}(1+\text{ز})\ \text{ن ع} \times \text{س ھ} \times \text{سَ ھ}}}{\text{ا}\,(1+\text{ز})} = \frac{\sqrt{\text{ن ع} \times \text{س ھ} \times \text{سَ ھ}}}{\sqrt{\text{ا}(1+\text{ز})}}$$

اس لیے $\frac{\text{ے ھ}^2}{\text{س ھ} \times \text{سَ ھ}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ا}(1+\text{ز})} = \frac{\text{ا}(1-\text{ز})}{\text{ا}(1+\text{ز})} = \frac{1-\text{ز}}{1+\text{ز}}$ جو مستقل ہے۔

اس لیے ہے کا نزیق ایک ناقص ہے جس کے راُس س اور سَ ہیں]

۴۷ ۔ مسئلہ ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ن پر کے مماس اور عماد زاویہ س ن سَ کے بالترتیب خارجی اور داخلی ناصف ہوتے ہیں ۔



فرض کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد س سَ سے گ پر ملتا ہے ۔
دفعہ ۱۹ کی رُو سے

س گ = ز × س ن اور سَ گ = ز × سَ ن

اس لیے $\frac{\text{س گ}}{\text{سَ گ}} = \frac{\text{س ن}}{\text{سَ ن}}$

اس لیے ن گ زاویہ س ن سَ کا ایک مُنصِّف ہے ۔
اب ہم یہ بتائینگے کہ ن گ زاویہ س ن سَ کا داخلی مُنصِّف ہے۔
چونکہ س گ = ز × س ن، اس لیے س گ کی بڑی سے بڑی قیمت ز × س اَ ہے

یعنی س گ < ز × ا اَ = س سَ

اس لیے نقطہ گ، س اور سَ کے درمیان واقع ہے ۔

اس لیے ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد ن گ زاویہ س ن سَ کا داخلی مُنصِف ہے۔

چونکہ ن پر کا مماس ن پر کے عماد پر علی القوائم ہے اس لیے ن پر کا عماد ن ت زاویہ س ن سَ کا خارجی ناصف ہے۔

فرع۔ مثلث س ن سَ کے حائط دائرہ اور محورِ اصغر ب ج بَ کے نقاطِ تقاطع کو ن سے ملانے والے خطوط ن پر کے مماس اور عماد ہیں۔

فرض کرو کہ △ س ن سَ کا حائط دائرہ ب ج بَ کو ھ اور ع پر قطع کرتا ہے۔
چونکہ ب ج بَ عمودی ناصف ہے س سَ کا اس لیے ع وسطی نقطہ ہے قوس س ع سَ کا۔

اس لیے ن ع اندرونی ناصف ہے زاویہ س ن سَ کا۔

اس لیے ن پر کا عماد ن ع ہے۔

نیز چونکہ زاویہ ع ن ھ قائمہ ہے اس لیے ن پر کا عماد ن ھ ہے۔

امثلہ ۱۷

(۱) مندرجہ بالا مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص کے راس ا یا اَ پر کا مماس

ناقص کے محورِ اعظم پر عمود ہے۔
(۲) ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس ماسکوں س اور سَ کے متناظر مرتبوں سے بالترتیب ے اور ےَ پر ملتا ہے اور ے اور ےَ سے س ن پر عمود نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمودوں کے پایوں کا درمیانی فاصلہ محورِ اعظم کے طول کے مساوی ہے۔
(۳) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر ماسکوں س اور سَ سے عمود س ما، سَ مَا نکالے گئے ہیں۔ اور ن ع محور ا اَ پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ ∠ ما ع مَا کا ناصف ع ن ہے۔
(۴) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر ماسکہ س سے عمود س ما نکالا گیا ہے۔ س ما اور سَ ن ایک دوسرے کو ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
(۱) س ما = ما ق
(۲) س ن = ق ن
اور (۳) سَ ق = ا اَ
نوٹ۔ نتیجہ (۱) سے ظاہر ہے کہ ن پر کے مماس میں ماسکہ س کا خیال ق ہے۔
(۵) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی مماس میں ایک ماسکہ س کے خیال کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دوسرا ماسکہ سَ ہے، اور نصف قطر محورِ اعظم کے مساوی ہے۔
(۶) ناقص کا ایک ماسکہ، ناقص پر کا ایک نقطہ، محورِ اعظم کا طول اور ایک مماس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔
[اشارہ - چونکہ ناقص کا ایک ماسکہ، ناقص پر کا ایک نقطہ اور محورِ اعظم کے طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ نیز چونکہ ناقص کا ایک ماسکہ، ایک مماس اور محورِ اعظم کا طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکہ کا طریق ایک اور دائرہ ہوگا (دیکھو سوال ۴ نتیجہ ۳)۔ ان دو دائروں کے تقاطع سے دوسرا ماسکہ حاصل ہوگا۔]
(۷) ناقص کا ایک ماسکہ، دو مماس اور محورِ اعظم کا طول معلوم ہیں، ناقص کو مرتسم کرو۔

(۸) ناقص کا ایک ماسکہ معلوم ہے اور ناقص ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

(۹) سوال بالا ۸ میں ناقص کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۱۰) ناقص کا ایک ماسکہ، اس کے جواب کا مرتب اور ایک مماس معلوم ہیں۔ ناقص کا دوسرا ماسکہ معلوم کرو۔

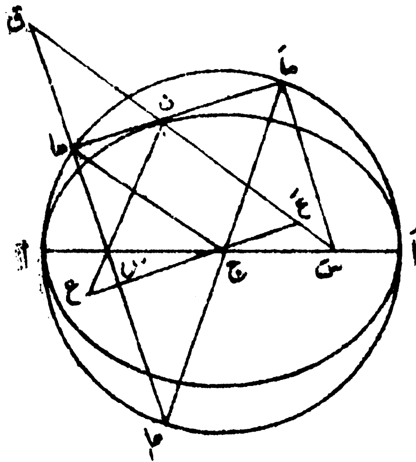
(۱۱) ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محورِ اعظم سے گ پر اور محورِ اصغر سے گ پر ملتا ہے،

ثابت کرو کہ مثلثات س ن گ اور گ ن سَ متشابہ ہیں۔

[دیکھو دفعہ ۴۸ کے مسئلہ کی فرع]

(۱۲) سوال بالا (۱۱) میں ثابت کرو کہ س ن × سَ ن = ن گ × ن گ

۴۸ ۔ اگر ناقص کے ماسکوں س، سَ سے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود س ما، سَ مَا نکالے جائیں تو عمودوں کے پائیں ما اور مَا امدادی دائرہ پر واقع ہونگے۔ نیز س ما × سَ مَا = ج ب²



فرض کرو کہ س ما اور سَ ن ممدودہ کا نقطۂ تقاطع ق ہے،

ج ما کو ملاؤ

تب مثلثات ن ماس اور ن ماق میں

< س ن ما = < ق ن ما

کیونکہ ن پر کا مماس ن ما زاویہ س ن سؔ کا خارجی ناصف ہے ۔

نیز < ن ماس = < ن ماق (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اور ن ما دونوں مثلثات میں مشترک ہے

اس لیے مثلثات ن ماس اور ن ماق آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے س ما = ق ما اور س ن = ق ن ۔

پس سؔ ق = سؔ ن + ن ق = سؔ ن + ن س = ۲ا = ۲ ج ا

چونکہ مثلث س سؔ ق میں س سؔ کا وسطی نقطہ ج ہے اور س ق کا وسطی نقطہ ما ہے

اس لیے ج ما = $\frac{1}{۲}$ سؔ ق = ج ا

اس لیے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر ج ا ہے

یعنی ما امدادی دائرہ پر واقع ہے ۔

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ماؔ بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے

اب ماؔ ج کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ سے مکرر ما۱ پر ملے ۔

چونکہ ماؔ ما۱ امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے < ماؔ ما ما۱ قائمہ ہے

لیکن بموجب عمل < ماؔ ماس بھی قائمہ ہے

اس لیے ماس ما۱ ایک خط مستقیم ہے

اب مثلثات ج سؔ ماؔ اور ج س ما۱ میں

ج سؔ = ج س

ج ماؔ = ج ما۱

اور < سؔ ج ماؔ = < س ج ما۱

اس لیے مثلثات ج سؔ ماؔ اور ج س ما۱ آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے سؔ ماؔ = س ما۱

پس س ما × سَ مَا = س ما × س ما،

= ۲ س × س ۲َ = ج ب۲

(بموجب دفعہ ۴۲۔ نوٹ ۳)

فرع (۱)۔ اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے مماس کے متوازی ہو اور ن س اور ن سَ ممدودہ بشرطِ ضرورت بالترتیب ع، عَ پر ملے تو ن ع = ن عَ = ج ۱

چونکہ ج ما // عَ ن اور ن ما // عَ ج

اس لیے ن ما ج عَ متوازی الاضلاع ہے

یعنی ن عَ = ج ما = ج ۱

اسی طرح سے ن ع = ج ۱

فرع (۲)۔ اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے اندر س واقع ہے تو متغیر خط کا لفاف ایک ناقص ہوگا جس کا ایک ماسکہ س ہے۔

فرع (۳)۔ اگر ایک متغیر خط پر خط کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطوں سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصلِ ضرب مستقل ہو تو متغیر خط کا لفاف ایک ناقص ہوگا جس کے ماسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

امثلہ ۱۸

(۱) مسئلۂ بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ س ع = سَ عَ نیز ثابت کرو کہ مثلثات ج س ع اور ج سَ عَ کے حائط دائرے مساوی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر مرکز ج سے عمود نکالا گیا ہے اور یہ عمود س ن ممدودہ سے ر پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر ج ۱ کے

مساوی ہے ۔

(۳) ناقص کا ایک ماسکہ، محورِ اعظم کا طول اور ناقص کے دو مماس دیے گئے ہیں، ناقص کو مرتسم کرو۔

[اشارہ ۔ اگر دیے ہوئے ماسکہ س سے ایک دیے ہوئے مماس پر عمود س ما ہو تو ما ج = ج ا جس کا طول دیا گیا ہے ۔ اس لیے ج ایک دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ما ہے اور نصف قطر ج ا کے مساوی ہے، اسی طرح سے دوسرے مماس کی مدد سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکز ایک اور دائرہ پر ہے، ان دائروں کے تقاطع سے ناقص کا مرکز ج معلوم ہوتا ہے]۔

(۴) ناقص کا ایک ماسکہ، ایک مماس اور خروج المرکز معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

[اشارہ ۔ دفعہ بالا کی ترقیم کے مطابق ج س = ز × ج ا

= ز × ج ما یعنی $\frac{\text{ج س}}{\text{ج ما}}$ = ز جو دیا گیا ہے، اس لیے ج کا طریق ایک دائرہ ہے، اور چونکہ س سَ = ۲ ج س، اس لیے سَ کا طریق بھی ایک دائرہ ہے]۔

(۵) دفعہ بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ چارضلعی س ما مَا سَ کا احاطہ اعظم ہوگا جبکہ ∠ ماج مَا قائمہ ہو ۔

[حل ۔ چونکہ س سَ مستقل ہے اس لیے س ما مَا سَ کا احاطہ اعظم ہوگا جبکہ س ما + ما مَا + ماسَ اعظم ہو ۔ یعنی جبکہ س ما + ما مَا + س ما، اعظم ہو یعنی جبکہ قائم الزاویہ مثلث مَا ما، ما کے ضلعوں ما مَا اور ما ما، کا مجموعہ اعظم ہو ۔ اب چونکہ قائم الزاویہ مثلث مَا ما، ما کا وتر مَا ما، مستقل ہے اس لیے مامَا + ماما، اعظم ہوگا جبکہ مثلث مذکور متساوی الساقین ہو ۔ اس صورت میں ج ما عمود ہوگا وتر ما ما، پر یعنی ∠ ماج مَا قائمہ ہوگا]۔

(۶) ناقص کا کوئی مماس امدادی دائرہ سے ما اور مَا پر ملتا ہے،

(دیکھو شکل مسئلہ بالا) ثابت کرو کہ ∠ س ما مَا اور ∠ س مَا ما دونوں قائمے ہیں۔

(۷) اگر ایک زاویہ قائمہ کا راس ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے اندر کے ایک ثابت نقطے س میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت ناقص کو مس کریگی (دیکھو فرع (۲))۔

(۸) ناقص کا محورِ اعظم ا اَ اور ناقص کا ایک مماس معلوم ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

(۹) ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ س ن کے قطر پر کھنچا ہوا دائرہ امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[اشارہ۔ اگر ن پر کے مماس پر س سے عمود س ما ہو تو ج ما تنصیف کرتا ہے س ن کی]

(۱۰) ناقص کا ماسکہ، ایک مماس اور محورِ اعظم کا طول معلوم ہیں۔ مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۱۱) ناقص کے دونوں ماسکے اور ایک مماس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

(۱۲) ایک بیرونی نقطہ سے ناقص کے مماسات کا جوڑا کھینچنے کے لیے مندرجۂ ذیل عمل کا ثبوت بہم پہنچاؤ۔

فرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ ت ہے۔ ت س کے قطر پر دائرہ کھینچو جو امدادی دائرہ سے ما، مَا پر ملے۔ تب ت ما اور ت مَا محدودہ ناقص کے مطلوبہ مماسات ہونگے۔

(۱۳) ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ مرکز ج میں سے خطوط ج ما، ج مَا سَ ن اور س ن کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور ن پر کے مماس سے ما اور مَا پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج ما = ج مَا = ج ا

(۱۴) ناقص کے مماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں۔

[اشارہ ۔ ماسکوں سے دیے ہوئے خط پر عمود نکالو فرض کرو کہ یہ عمود امدادی دائرہ سے محورِ اعظم کی ایک ہی جانب نقطوں ما اور مَا پر ملتے ہیں ۔ تب ما مَا ناقص کا ایک مماس ہوگا جو دیے ہوئے خط کے متوازی ہے ۔ اسی طرح سے عمودوں اور امدادی دائرہ کے اُن نقاطِ تقاطع کی مدد سے جو محورِ اعظم کی دوسری جانب ہیں دوسرا مماس بھی کھینچ سکتا ہے] ۔

(۱۵) دو مساوی ناقصوں کے مرکز مشترک ہیں ۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات کھینچو ۔

[اشارہ ۔ چونکہ ناقص مساوی ہیں اور مرکز منطبق ہیں اس لیے دونوں ناقصوں کا ایک ہی امدادی دائرہ ہے ۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات دیے ہوئے ناقصوں کے ماسکوں میں سے دو دو کو ملانے والے چار خطوط اور امدادی دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتے ہیں] ۔

(۱۶) ناقص کا ایک ماسکہ ، ایک مماس اور محورِ اصغر کا طول معلوم ہیں ۔ دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو ۔

(۱۷) ایک ثابت نقطہ س پر ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کے ایک متغیر وتر ن نَ کے محاذی ہمیشہ زاویہ قائمہ بنتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن نَ ایک ایسے ناقص کو لف کرتا ہے جس کے ماسکے س اور ج ہیں ۔

(۱۸) ناقص کا ایک مماس امدادی دائرہ سے ما ، مَا پر ملتا ہے اور ایک اور مماس ما مَا کو و پر عمودوار قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ و ما × و مَا = ج ب²

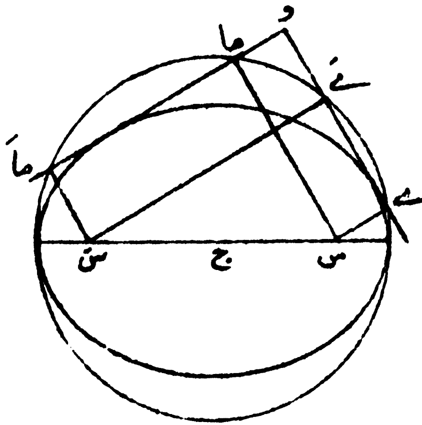
[اشارہ ۔ س ما اور سَ مَا دونوں ما مَا پر عمودوار ہیں ۔ اگر و میں سے گزرنے والا دوسرا مماس امدادی دائرہ سے ے ، ےَ پر ملے تو س ے اور سَ ےَ دونوں ے ےَ پر عمود وار ہونگے ۔

تب و ما × و مَا = س ے × سَ ےَ = ج ب²

(۱۹) سوال بالا (۱۸) میں ثابت کرو کہ ج و² = ج ا² + ج ب²

[اشارہ ۔ و ما × و مَا = ج ب²

یعنی ج ب² = اُس مماس کا مربع جو و سے امدادی دائرہ تک کھینچا جائے ۔



یعنی ج بَ۲ = ج وَ۲ ـ ج اَ۲ یعنی ج وَ۲ = ج ا۲ + ج ب۲

نوٹ۔ اس سوال سے ظاہر ہے کہ ناقص کے دو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا مربع نیم محورِ اعظم اور نیم محورِ اصغر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس دائرہ کو ناقص کا **مرتب دائرہ** کہتے ہیں۔

۴۹۔ ناقص کے متعلق بعض مسائل ایسے ہیں جو قائم تظلیل کی مدد سے بہ آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔ اس لیے اب ہم قائم تظلیل کے متعلق چند اساسی مسئلے ثابت کرینگے اور بعد ازاں اِن مسئلوں کی مدد سے ناقص کے مزید خواص حاصل کرینگے۔

۵۰۔ تعریفات۔

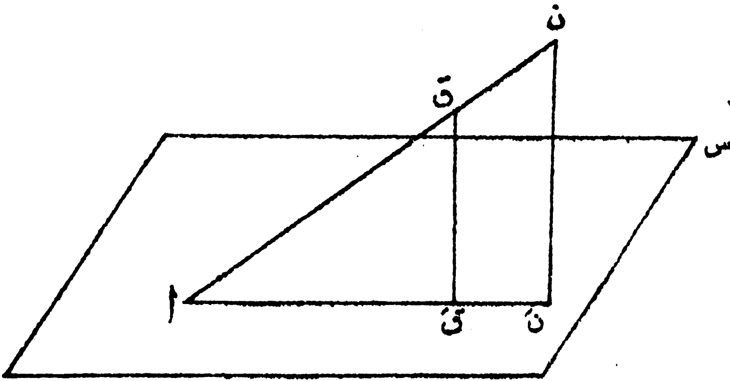
(۱) اگر کسی نقطہ ن سے ایک ثابت سطح مستوی س پر عمود ن نَ نکالا جائے تو عمود کے پائیں نَ کو نقطہ ن کا قائم ظل کہتے ہیں اور سطح س کو سطح تظلیل کہتے ہیں۔

(۲) اگر نقطہ ن ایک خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کرے تو ایک دی ہوئی مستوی سطح س پر ن کا ظل ایک اَور خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کریگا جس کو دیے ہوئے خط کا قائم ظل کہتے ہیں۔

(۳) اگر دی ہوئی شکل ایک مستوی سطح میں واقع ہو تو اس سطح اور سطحِ تظلیل کے خطِ تقاطع کو محورِ تظلیل کہتے ہیں۔

۱۵۔ قائم تظلیل کے مشہور خواص حسبِ ذیل ہیں:۔

(ا) خطِ مستقیم کا ظل خطِ مستقیم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ دیا ہوا خطِ مستقیم ن ا سطحِ تظلیل س سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔ ن سے سطح س پر عمود ن نَ نکالو۔ تب مستوی سطح ا ن نَ سطحِ تظلیل س پر عمود وار ہوگی۔ خطِ مستقیم ن ا کے کسی اَور نقطہ ق سے سطح س پر عمود ق قَ نکالو۔ تب ن نَ اور ق قَ ہم سطح ہونگے۔ اس لیے عمود ق قَ مستوی سطح ن ا نَ میں واقع ہوگا۔ اس لیے نقطہ ق کا قائم ظل قَ سطحوں س اور ن ا نَ کے خطِ تقاطع پر یعنی خطِ مستقیم ا نَ پر واقع ہوگا۔

فرع (ا) دو خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع کا ظل اِن خطوط کے

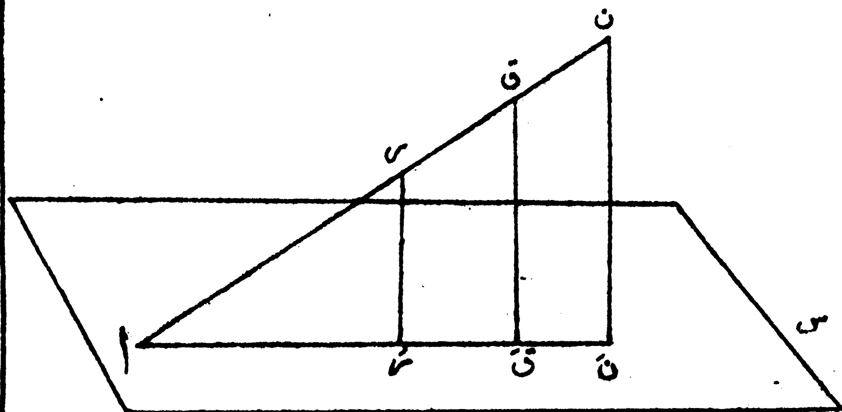
ظلوں کا نقطۂ تقاطع ہوتا ہے۔

(ب) متوازی خطوط کے قائم ظل متوازی خطوط ہوتے ہیں۔ چونکہ دیے ہوئے خطوط متوازی ہیں اس لیے اِن کا نقطۂ تقاطع لاتناہی پر ہے۔ اس لیے اِن خطوط کے ظلوں کا نقطۂ تقاطع بھی لاتناہی پر ہوگا یعنی دیے ہوئے خطوط کے ظل باہم متوازی ہونگے۔

برعکس اس کے اگر دو دیے ہوئے خطوط کے قائم ظل باہم متوازی ہوں تو دیے ہوئے خطوط بھی باہم متوازی ہونگے۔

(ج) ایک محدود خطِ مستقیم کے حصّوں کی نسبت اِن حصّوں کے ظلوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ن ق ر ا ایک دیا ہوا خطِ مستقیم ہے جو سطحِ تظلیل س سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ سطحِ تظلیل س پر اس خط کا قائم ظل



خطِ مستقیم نَ قَ رَ ا ہے۔ تب خطوط ن نَ، ق قَ اور ر رَ سب باہم متوازی ہونگے کیونکہ یہ سب کے سب ایک ہی سطح میں ہیں اور ایک ہی سطح س پر عمود وار ہیں اور اِن متوازی خطوط کو خطوط ن ق ر ا اور

نَ قَ سَ ا کاٹتے ہیں۔ اس لیے حصّوں ن ق، ق س کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ان حصّوں کے ظلّوں نَ قَ، قَ سَ کو آپس میں ہے۔

نوٹ (۱) کسی خط اور اس خط کے ظل کے درمیانی زاویہ کو خط اور سطح تظلیل کا درمیانی زاویہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ محدود خط ا ب کا ظل اَ بَ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ا ب اور اَ بَ کا درمیانی زاویہ طہ ہے۔ تب اَ بَ = ا ب × جم طہ

اس نتیجہ کی مدد سے بھی مندرجۂ بالا مسئلہ (ج) حاصل ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲) اگر ایک خط سطح تظلیل کے متوازی ہو تو اس کے ظل کا طول خط کے طول کے مساوی ہوگا۔

(د) متوازی خطوط کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ظلّوں کے طولوں کو آپس میں ہے۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د باہم متوازی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان کے ظل اَ بَ اور جَ دَ ہیں۔ اگر ا ب اور اَ بَ کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ج د اور جَ دَ کا درمیانی زاویہ بھی طہ ہوگا۔

اس لیے اَ بَ = ا ب جم طہ اور جَ دَ = ج د جم طہ

اس لیے اَ بَ : جَ دَ = ا ب : ج د جو ثابت کرنا تھا۔

(ہ) کسی منحنی کے مماس کا ظل منحنی کے ظل کا مماس ہوتا ہے۔

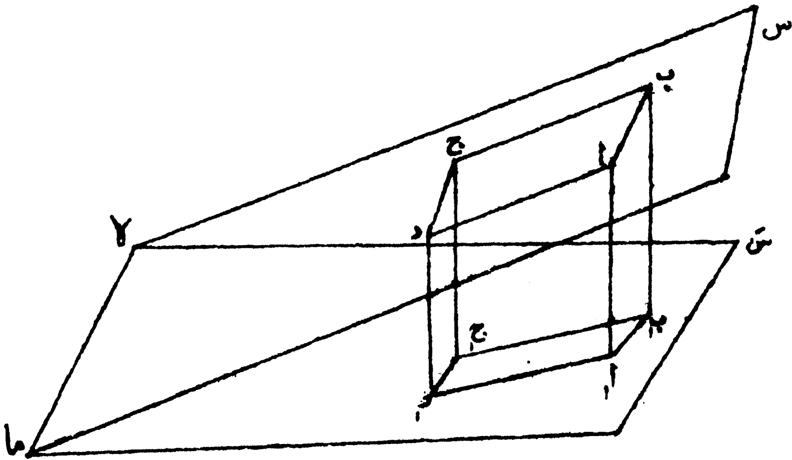
فرض کرو کہ ایک منحنی پر دو قریب کے نقطے ن اور ق ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ن اور ق کے ظل بالترتیب نَ اور قَ ہیں۔ چونکہ نَ قَ کا طول ن ق کے طول سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ اس لیے جوں جوں نقطہ ق منحنی پر حرکت کرکے نقطہ ن کے بے حد قریب آتا ہے نقطہ قَ منحنی کے ظل پر حرکت کرکے نقطہ نَ کے بے حد قریب آجاتا ہے اور انتہا میں جب نقطہ ق نقطہ ن پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ قَ نقطہ نَ پر منطبق ہو جاتا ہے۔ اس لیے منحنی کے نقطہ ن پر کے مماس کا ظل منحنی کے ظل کے نقطہ نَ پر کا مماس ہے۔

نیز ضمناً یہ بھی ثابت ہوا ہے کہ منحنی اور اس کے کسی مماس کے نقطۂ تماس کا ظل

منحنی کے ظل اور مماس کے ظل کا نقطۂ تماس ہوتا ہے۔

(و) اگر ایک مستوی سطح س پر ایک رقبہ ر ہو اور اس کا ظل ایک اور مستوی سطح سَ پر نکالا جائے تو ظل کا رقبہ رَ = ر × جم طہ جہاں سطحوں س اور سَ کا درمیانی زاویہ طہ ہے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ دیا ہوا رقبہ ایک مستطیل اب ج د ہے جس کا ایک ضلع اب محورِ تظلیل کے متوازی ہے اور دوسرا ضلع ب ج لازماً محورِ تظلیل پر عمود وار ہے۔



فرض کرو کہ اب ج د کا ظل ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ہے۔

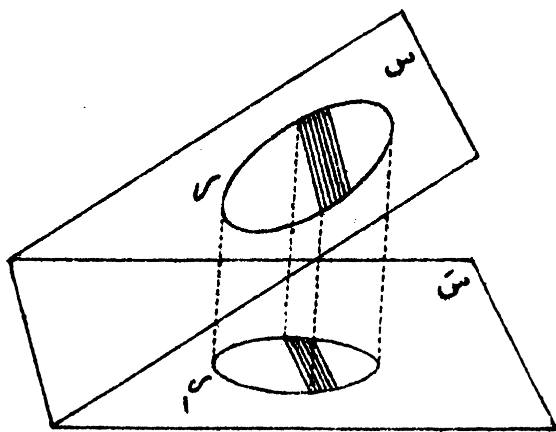
تب ا۱ ب۱ محورِ تظلیل کے متوازی ہوگا اور ب۱ ج۱ محورِ تظلیل پر عمود وار ہوگا۔

اس لیے ظل ا۱ ب۱ ج۱ د۱ بھی ایک مستطیل ہے۔

نیز ا۱ ب۱ = اب اور ب۱ ج۱ = ب ج جم طہ کیونکہ ب ج اور ب۱ ج۱ کا درمیانی زاویہ طہ ہے۔

اس لیے ظل ا۱ ب۱ ج۱ د۱ کا رقبہ رَ = اب × ب ج جم طہ = ر جم طہ

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ سطح س پر کوئی رقبہ ر دیا گیا ہے جس کا ظل سطح تظلیل سً پر رً ہے۔
فرض کرو کہ سطحوں س اور سً کا درمیانی زاویہ طہ ہے۔



رقبہ ر کو محور تظلیل کے متوازی خطوط کے ذریعے ایسی بے شمار پٹیوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی بہت چھوٹی ہو۔ چونکہ ہر پٹی کی چوڑائی بہت چھوٹی ہے اس لیے ہر ایک پٹی کو مستطیل مانا جا سکتا ہے۔ ان پٹیوں میں سے کسی ایک پٹی کے ظل کا طول اُس پٹی کے طول کے مساوی ہوگا اور

ظل کا عرض = اُس پٹی کا عرض × جم طہ

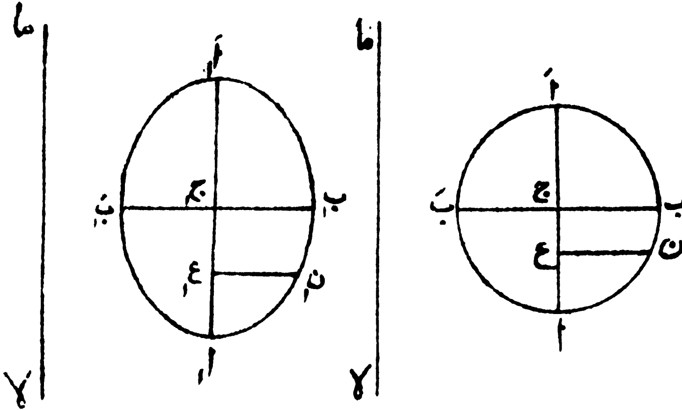
اس لیے کسی پٹی کے ظل کا رقبہ = پٹی کا رقبہ × جم طہ

اس لیے ظل کی تمام پٹیوں کا مجموعی رقبہ = سطح س پر کی پٹیوں کے رقبوں کا مجموعہ × جم طہ، یعنی ظل کا رقبہ رً = دیا ہوا رقبہ ر × جم طہ ۔

۵۲۔ مسئلہ۔ دائرہ کا قائم ظل ناقص ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح س پر کے دائرہ (ج) کا ظل سطح تظلیل سً پر نکالا گیا ہے دائرہ کے قطر ا ج اً اور ب ج بً کھینچو جو بالترتیب محورِ تظلیل کے متوازی

اور اس پر عمود وار ہوں ۔ فرض کرو کہ ج، ا، أ، ب، بَ کے ظل بالترتیب ج۱، ا۱، أ۱، ب۱، بَ۱ ہیں ۔ [وضاحت کی خاطر اصل شکل اور اس کا ظل ذیل میں علاحدہ علاحدہ دکھائے گئے ہیں] ۔



چونکہ ا ج أ سطح تظلیل کے متوازی ہے

اس لیے　ا۱ع۱ = اع　اور　ع۱أ۱ = عأ

نیز　ب۱ ج۱ بَ۱ عمودوار ہے ا۱ ج۱ أ۱ پر

دائرہ (ج) کے کسی نقطہ ن سے قطر ا ج أ پر عمود ن ع نکالو
اور فرض کرو کہ ن ع کا ظل ن۱ع۱ ہے ۔ تب ن۱ع۱ عمودوار ہوگا ا۱أ۱ پر ۔

چونکہ ن ع اور ب ج متوازی ہیں

اس لیے　(ن۱ع۱) / (ن ع) = (ب۱ج۱) / (ب ج)

یعنی　(ن۱ع۱)² / (ن ع)² = (ب۱ج۱)² / (ب ج)² = (ب۱ج۱)² / (ج۱ا۱)²

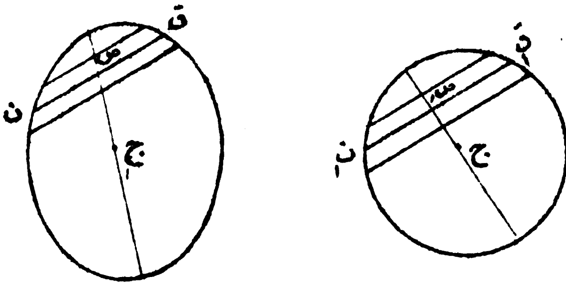
نیز　ن ع² = اع × عأ = ا۱ع۱ × ع۱أ۱

اس لیے $\frac{ن_۱ع_۱^۲}{ا_۱ع_۱ \times ع_۱ا^۲} = \frac{ب_۱ج^۲}{ج_۱ا^۲}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

پس دفعہ ۴۵ کی رُو سے $ن_۱$ کا طریق ایک ناقص ہے جس کا محورِ اعظم $ا_۱ اَ_۱$ ہے اور جس کے نصف محورِ اعظم اور نصف محورِ اصغر $ج ب_۱$ اور $ج ا_۱$ ہیں۔

نوٹ ۔ دائرہ کے ہر قطر کی تنصیف مرکز ج پر ہوتی ہے اس لیے دائرہ کے ظل یعنی ناقص میں نقطہ ج کے ظل $ج_۱$ میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف $ج_۱$ پر ہوتی ہے اس لحاظ سے نقطہ $ج_۱$ کو ناقص کا مرکز کہتے ہیں۔ یعنے دائرہ کے مرکز کا ظل ناقص کا مرکز ہے۔

۵۳ ۔ مسئلہ ۔ اگر ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خطِ مستقیم ہوگا جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ (ج) کا ظل ایک ناقص ہے جس کا مرکز $ج_۱$ ہے ناقص کے متوازی وتروں کا نظام دائرہ (ج) کے متوازی وتروں کے ایک نظام کا ظل ہے اور ناقص کے ان وتروں کے وسطی نقاط دائرہ کے متناظر وتروں کے وسطی نقطوں کے ظل ہیں ۔ دائرہ کی صورت میں متوازی وتروں کے

وسطی نقطے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور چونکہ خطِ مستقیم کا ظل خطِ مستقیم ہوتا ہے اس لیے ناقص کی صورت میں بھی متوازی وتروں کے وسطی نقطے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہونگے جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے ۔

تعریف ۔ ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خطِ مستقیم کو ناقص کا قطر کہتے ہیں کیونکہ یہ خط دائرہ کے کسی نہ کسی قطر کا ظل ہے ۔

فرع ۔ اگر ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر ناقص سے نقاط ع، عَ پر ملے تو ع اور عَ پر کے مماسات ان وتروں کے متوازی ہونگے ۔

ع میں سے ایک خط دیے ہوئے وتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط ناقص سے مکرر نقطہ ھ پر ملتا ہے چونکہ ناقص کا وتر ع ھ دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے اس لیے ضروری ہے کہ ع ھ کا وسطی نقطہ قطر ع عَ پر واقع ہو اور یہ صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ نقطہ ھ نقطہ ع پر منطبق ہو ۔ اس لیے وہ خط جو ع میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ ع پر ناقص کا مماس ہے ۔ یعنی ع پر ناقص کا مماس دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے ۔

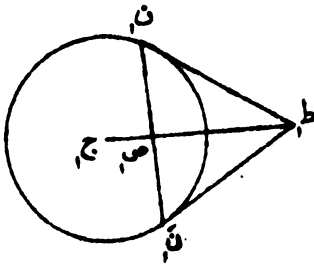
اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ عَ پر کا مماس بھی دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے ۔

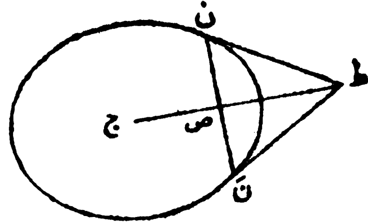
۵۴ ۔ مسئلہ ۔ ناقص کے کسی وتر کے سروں پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع اُس قطر پر واقع ہوتا ہے جو وترِ مذکور کی تنصیف کرتا ہے ۔

دائرہ (ج) میں کسی وتر ن نَ کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط ہے ۔ اگر ج ط اور ن نَ کا نقطۂ تقاطع ص ہو تو ن نَ کا وسطی نقطہ ص ہو گا ۔

اب اس شکل کا قائم ظل لو ۔ دائرہ کا ظل ایک ناقص ہوگا جس کا مرکز ج دائرہ کے مرکز ج کا ظل ہوگا ۔ دائرہ کے وتر ن نَ کا ظل ناقص کا

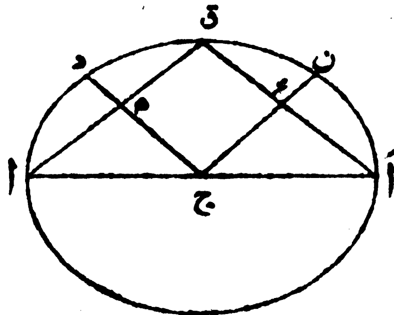
وتر ن نَ ہوگا اور ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط دائرہ کے





نقاط ن۱، نَ۱ پر مماسات کے نقطۂ تقاطع ط۱ کا ظل ہوگا اور ج۱ ط۱ کا ظل ج ط ہوگا۔
نیز ج ط اور ن نَ کا نقطۂ تقاطع ص نقطہ ص۱ کا ظل ہوگا۔
چونکہ ایک خطِ مستقیم کے حصّوں کی نسبت تظلیل سے نہیں بدلتی اس لیے
ن۱ نَ۱ کے وسطی نقطہ ص۱ کا ظل یعنی نقطہ ص، ناقص کے وتر ن نَ کا وسطی نقطہ ہوگا۔
پس ثابت ہوا کہ ناقص کے وتر ن نَ کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط ناقص کے اُس قطر پر ہے جو وتر ن نَ کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔



فرض کرو کہ ناقص کا ایک قطر ج ن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

ناقص کے محورِ اعظم ا اَ کے سرے اَ میں سے ج د کے متوازی ایک وتر اَ ق کھینچو۔ ا ق کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ اَ ق اور ج ن کا نقطۂ تقاطع ع ہے اور ا ق اور ج د کا نقطۂ تقاطع ھ ہے۔

حسب مفروض اَ ق کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔

مثلث اَ ق ا میں اَ ق کا وسطی نقطہ ع ہے اور ا اَ کا وسطی نقطہ ج ہے۔ اس لیے ا ق، ج ع کے متوازی ہے۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر ا ق کا وسطی نقطہ ھ ہے۔

چونکہ ج ھ مثلث اَ ق ا کے ضلع ا اَ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور ضلع اَ ق کے متوازی ہے اس لیے ا ق کا وسطی نقطہ ھ ہے اس لیے ا ق کے متوازی وتروں کی تنصیف ج د کرتا ہے یعنی قطر ج ن کے متوازی وتروں کی تنصیف قطر ج د کرتا ہے۔

تعریف۔ اگر ناقص کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف دُوسرا قطر کرے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف پہلا قطر کرے) تو اِن قطروں کو **مزدوج قطر** کہتے ہیں۔

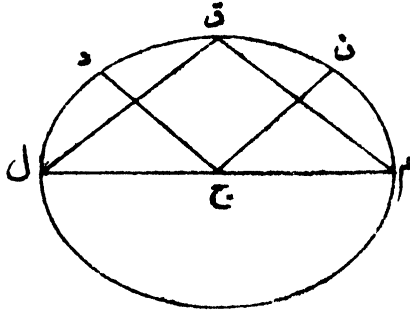
نوٹ:۔ ناقص کا محورِ اعظم اور محورِ اصغر مزدوج قطروں کی خاص صورت ہے۔

۵۶۔ تعریف۔ اگر ناقص کے کسی قطر ن ج نَ کے سروں ن، نَ کو ناقص کے کسی نقطہ ق سے ملایا جائے تو وتر ن ق اور نَ ق تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ناقص کے تکمیلی وتروں کے متوازی قطر مزدوج قطر ہوتے ہیں۔

ناقص کے کسی نقطہ ق کو کسی قطر ل ج م کے سروں سے ملاؤ۔ تب ق ل، ق م تکمیلی وتر ہونگے۔

مرکز ج میں سے ج ن، ج د بالترتیب ل ق، م ق کے متوازی کھینچو۔



ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ج ن، ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ چونکہ مثلث ق ل م کے ضلع ل م کے وسطی نقطہ ج میں سے ج ن، ل ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اس لیے ج ن، ق م کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ق م کے متوازی ہیں۔ یعنی قطر ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج د کے متوازی ہیں۔

اس لیے قطر ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج ن کے متوازی ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں۔

امثلہ ۱۹

(۱) ثابت کرو کہ سطح تظلیل کے مناسب انتخاب سے ناقص کی تظلیل دائرہ میں کی جا سکتی ہے۔

اشارہ ۔ سطح تظلیل ناقص کے محورِ اصغر کے متوازی ہے اور ناقص کی سطح کے ساتھ زاویہ جم $^{-1}$ $\frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$ بناتی ہے۔

(۲) اگر ناقص کے ایک وتر ن نَ کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط ہو اور ط میں سے گزرنے والا قطر ناقص سے ع، عَ پر اور وتر ن نَ سے ص پر ملے تو ثابت کرو کہ ع عَ کی موسیقی تقسیم ص اور ط پر ہوتی ہے اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ ج ص × ج ط = ج ع^2

(۳) اگر اوپر کے سوال میں ط میں کوئی اور خط کھینچا جائے جو ناقص سے ق، قَ پر ملے اور وتر ن نَ سے م پر ملے تو ثابت کرو کہ ق قَ کی موسیقی تقسیم م اور ط پر ہوتی ہے۔

(۴) اگر دائرہ کی سطح اور سطح تظلیل کا درمیانی زاویہ ط ہو تو تظلیل سے جو ناقص حاصل ہوتا ہے اُس کا خروج المرکز معلوم کرو۔

(۵) ناقص کی سطح میں ایک نقطہ ط ہے اور ط میں سے گزرنے والا کوئی خط ناقص سے ن اور نَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اور نَ پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ ناقص کے دو متوازی مماسات کے نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

(۷) ناقص کے متوازی وتروں کا وہ نظام کھینچو جن کے وسطی نقطے ایک دیے ہوئے قطر پر واقع ہوں۔

(۸) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا مماس راس ا پر کے مماس سے ھا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ھا اور اَن باہم متوازی ہیں۔

(۹) اگر ناقص کے دو مماسوں کے وترِ تماس کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس خط کے وہ حصے جو مماسات اور ناقص کے درمیان منقطع ہوتے ہیں مساوی ہیں۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے کسی سرے پر کا مماس دوسرے قطر کے متوازی ہے۔

(۱۱) ایک متوازی الاضلاع کے چاروں ضلعے ایک دیے ہوئے ناقص کو مس کرتے ہیں ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کے وتر ناقص کے

مزدوج قطر ہیں ۔

(۱۲) ثابت کرو کہ ناقص کے محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے سروں پر کے مماسوں سے بننے والے مستطیل کے وتر ناقص کے مزدوج قطر ہیں ۔ نیز ثابت کرو کہ ان قطروں کے طول مساوی ہیں ۔

(نوٹ ۔ ان مزدوج قطروں کو مساوی مزدوج قطر کہتے ہیں) ۔

(۱۳) ثابت کرو کہ دائرہ کے دو علی القوائم قطروں کے ظل اُس ناقص کے مزدوج قطر ہیں جو دائرہ کی تظلیل سے حاصل ہوتا ہے ۔

(۱۴) ج ن، ج د ناقص کے دو مزدوج نیم قطر ہیں ۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ن د کا رقبہ مستقل ہے ۔

(۱۵) ن ج نَ اور د ج دَ ناقص کے مزدوج قطر ہیں ۔ ثابت کرو کہ ن، نَ، د، دَ پر کے مماسوں سے جو متوازی الاضلاع بنتا ہے اُس کا رقبہ مستقل ہے ۔

(۱۶) ج ن، ج د ناقص کے نیم مزدوج قطر ہیں ۔ ن سے ج د پر عمود ن ف نکالا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ج د × ن ف = ج ا × ج ب

(۱۷) ج ن، ج د ناقص کے مزدوج نیم قطر ہیں ۔ امدادی دائرہ پر

ن اور د کے متناظر نقطے نَ اور دَ ہیں ۔ ثابت کرو کہ زاویہ نَ ج دَ قائمہ ہے ۔

اشارہ۔ معلوم ہے کہ د اور د′ پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ط محورِ اعظم ممدودہ پر واقع ہے۔ نیز د′ پر کا مماس دط متوازی ہے ج ن کے۔ اس لیے مثلثات ط م د اور ج ل ن متشابہ ہیں۔ اس لیے $\frac{\text{ط م}'}{\text{ج ل}}$ = $\frac{\text{م د}}{\text{ل ن}}$ = $\frac{\text{م د}'}{\text{ل ن}'}$

اس لیے مثلثات ط م د′ اور ج ل ن′ متشابہ ہیں یعنی د′ط متوازی ہے ن′ ج کے یعنی ن′ ج د′ قائمہ ہے۔

(۱۸) سوال بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ ج ن^2 + ج د^2 = ج ا^2 + ج ب^2

فرض کرو کہ زاویہ ل ج ن′ = طہ

تب ج ل = ج ن′ جم طہ = ج ا جم طہ

ل ن = $\frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$ × ل ن′ = $\frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}}$ × ج ن′ جب طہ = ج ب جب طہ

اسی طرح سے ج م = ج ا جب طہ اور م د = ج ب جم طہ

اس لیے ج ن^2 + ج د^2 = (ج ل^2 + ل ن^2) + (ج م^2 + م د^2)

= ج ا^2 جم^2 طہ + ج ب^2 جب^2 طہ + ج ا^2 جب^2 طہ + ج ب^2 جم^2 طہ

= ج ا^2 + ج ب^2

(۱۹) ن ج′ ن د ناقص کے مزدوج نیم قطر ہیں۔ ثابت کرو کہ ن س × ن س′ = ج د^2

اشارہ - س ن + سَ ن = ۲ ا

اس لیے س ن² + سَ ن² + ۲ س ن × سَ ن = ۴ ا²

لیکن س ن² + سَ ن² = ۲ ن ج² + ۲ ج س²

= ۲ ن ج² + ۲ ا² - ۲ ب²

اس لیے ۲ س ن × سَ ن = ۴ ا² - (۲ ن ج² + ۲ ا² - ۲ ب²)

اس لیے س ن × سَ ن = ا² + ب² - ج ن²

= ج ن² + ج د² - ج ن²

= ج د²

امثلہ ۳۰

(ناقص پر متفرق مثالیں)

(۱) ناقص کے مرکز کو مرکز مان کر دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ متبادل نقطوں کو ملانے والے خطوط مرکز میں سے گزرتے ہیں اور محور کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۲) کاغذ پر ایک ناقص کھینچا ہوا ہے اس کے ضروری اجزا معلوم کرو۔
[اشارہ - کوئی دو متوازی وتر کھینچو - ان کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط قطر ہوگا جس کا وسطی نقطہ مرکز ہوگا - اب ایک ہم مرکز دائرہ کھینچ کر سوال (۱) کی مدد سے محور معلوم کرو۔ اب دیگر اجزا بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں]

(۳) اگر ناقص کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو ثابت کرو کہ نقطۂ تقاطع ناقص کا مرکز ہوگا۔

(۴) ناقص کے کسی نقطہ پر کا مماس ایک قطر کے سروں پر کے مماسات سے ط اور ھا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ط ، ج ھا ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

(۵) امدادی دائرہ کی مدد سے ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ سے ناقص کے مماس کھینچو۔

(۶) ج ن، ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ ن پر کا عماد محورِ اعظم سے گ پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ × ن ف = ج ب^۲

[اشارہ۔ فرض کرو کہ ن کا معیّن ن ع ممدودہ ج د سے ھ پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن سے محورِ اصغر پر عمود ن ع ہے اور ن پر کا مماس محورِ اصغر ممدودہ سے ت پر ملتا ہے۔ چونکہ گ، ف، ھ، ع مشترک المحیط ہیں اس لیے ن گ × ن ف = ن ع × ن ھ = ج ع × ج ت = ج ب^۲]

(۷) ج ن، ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں، ن پر کا عماد محورِ اصغر سے گ، پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ، × ن ف = ج ا^۲

(۸) اگر ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں میں سے گزرنے والے قطر مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ ماسکی وتر کا طول نیم محورِ اعظم کے مساوی ہوگا۔

[اشارہ۔ فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س د ہے۔ حسب مفروض ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں، ج میں سے د ن کے متوازی ایک خط کھینچو جو ن پر کے مماس سے ک پر ملے۔ تب ن د = ج ک = ج ا]

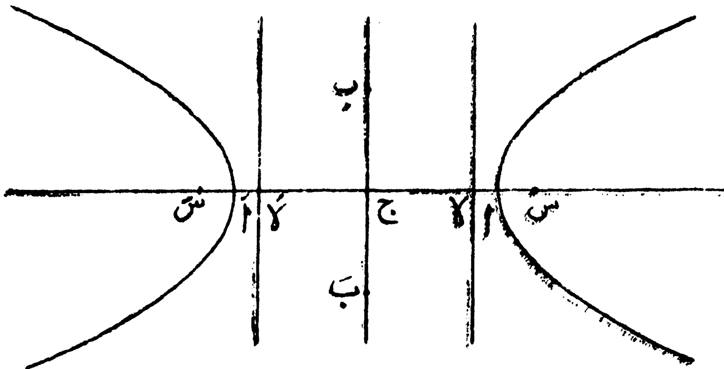
(۹) دو ناقصوں کا امدادی دائرہ ایک ہی ہے۔ اگر ان میں ایک ناقص دوسرے کے ماسکوں میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسرا ناقص پہلے کے ماسکوں میں سے گزریگا۔

(۱۰) ناقص کے مرکز ج سے نقطہ ن پر کے مماس پر عمود ن ما نکالا گیا ہے اور ما سے ناقص کا دوسرا مماس ما ق ہے۔ ثابت کرو کہ ن پر کا عماد ق میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے میں سے گزرتا ہے۔

چوتھا باب

زائد

۵۷ - دفعہ (۱) کی تعریف کے بموجب زائد ایک مخروطی ہے جس کا خروج المرکز ز بڑا ہے ۱ سے۔ پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علٰحدہ علٰحدہ شاخیں ہیں اور جس کے دو تشاکل کے محور ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز ج پر عمودوار قطع کرتے ہیں اور جن میں سے



ایک محور ا ا′ مرتب پر عمودوار ہے اور دوسرا محور ب ب′ مرتب کے متوازی ہے۔

نیز محور ا اَ پر دو ماسکے س اور سَ واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب ہیں جو ا اَ پر عمود وار ہیں اور ا اَ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب نقاط لا اور لاَ پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج س : ج ا = ج ا : ج لا = ز

ماسکوں میں سے گزرنے والا محور زائد سے دو حقیقی نقطوں ا، اَ پر ملتا ہے جو زائد کے راْس کہلاتے ہیں۔ اس محور کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ اور دوسرے محورِ تشاکل ب بَ کو جو زائد کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا مزدوج محور کہتے ہیں۔

۵۸۔ اگر مزدوج محور ب ج بَ پر نقاط ب، بَ اس طرح لیے جائیں کہ بَ ج = ج ب اور − ج ب^{2} = ج ا^{2} − ج س^{2} تو نقاط ب اور بَ مزدوج محور کے سرے کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ج ب^{2} = اَس × ا س = ج س × لا س

کیونکہ ج ب^{2} = ج س^{2} − ج ا^{2} = (ج س + ج ا)(ج س − ج ا)

= اَس × ا س

نیز ج ب^{2} = ج س^{2} − ج ا^{2} = ج س^{2} − ج س × ج لا

= ج س [ج س − ج لا] = ج س × لا س

ترقیم ۔ نیم قاطع محور ج ا کے طول کو بالعموم اُ سے اور نیم مزدوج محور ج ب کے طول کو بالعموم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ:۔ (۱) چونکہ ج س = ز × ج ا

اِس لیے رشتہ ج ب^{2} = ج س^{2} − ج ا^{2} ہوجاتا ہے،

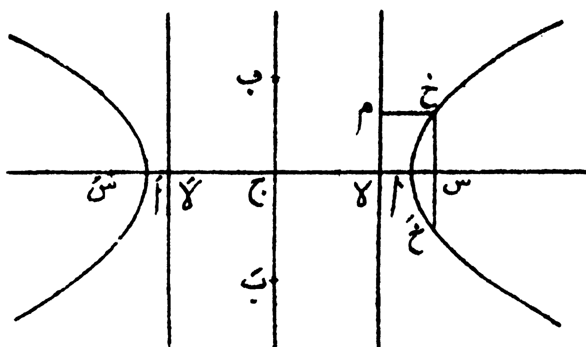
ج ب^{2} = ج ا^{2} (ز^{2} − ۱)

یعنی اوپر کی ترقیم کے مطابق ب^{2} = اُ^{2} (ز^{2} − ۱)

اس رشتہ کی مدد سے اگر مقادیر اُ، ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں تو تیسری مقدار معلوم ہوسکتی ہے۔

نوٹ:- (۲) اس دفعہ کا مقابلہ ناقص کے مماثل خواص مندرجۂ دفعہ ۲۴ کے ساتھ کرو۔

۵۹ - مسئلہ۔ زائد کا نیم وترِ خاص، نیم قاطع محور اور نیم مزدوج محور کا تیسرا تناسب ہے یعنی $\frac{ج ا}{ج ب} = \frac{ج ب}{س خ}$



وترِ خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

چونکہ خ زائد پر کا نقطہ ہے، اس لیے $\frac{س خ}{خ م} = ز = \frac{ج س}{ج ا}$

یعنی $س خ \times ج ا = ج س \times خ م$

$= ج س \times لا س$

$= ج ب^2$ (بموجب دفعہ ۵۸)

اس لیے $\frac{ج ا}{ج ب} = \frac{ج ب}{س خ}$

نوٹ - مسئلہ بالا میں ضمناً حاصل ہوا کہ نیم وترِ خاص $س خ = \frac{ج ب^2}{ج ا}$

اگر حسب معمول نیم وترِ خاص کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$ل = \frac{ب^2}{ا}$

امثلہ ۲۱

(۱) زائد کے کسی محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی مخالف جانبوں میں دو خط کھینچے گئے ہیں جو زائد سے ملتے ہیں اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے طول مساوی ہیں - نیز اس مسئلہ کا عکس بیان کرو اور اُسے بھی ثابت کرو۔

(۲) دفعات ۷، ۸ کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو کہ زائد کُلیتہً اُن خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سروں ا، اَ میں سے گزرتے ہیں اور ا اَ پر عمود وار ہیں اور اس نتیجہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زائد دو لامتناہی شاخوں پر مشتمل ہے۔

(۳) اگر ایک ناقص، ایک مکافی اور ایک زائد میں ایک ماسکہ اور مرتب مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ مکافی کلیتہً ناقص کے باہر واقع ہوگا اور زائد کی ایک شاخ کے اندر واقع ہوگا۔

(۴) دو ثابت نقطوں ا اور ب میں سے متعدد دائرے کھینچے گئے ہیں اور ان دائروں میں سے کسی ایک کی قوس پر نقطہ ن ایسا ہے کہ قوس ا ن قوس ن ب کی نصف ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق اس قطع زائد کی ایک شاخ ہے جس کا ماسکہ ا ہے اور مرتب ا ب کا عمودی مُنصِّف ہے اور خروج المرکز ۲ ہے۔

(۵) اگر ایک دائرہ قاطع محور کو ایک ماسکہ پر مس کرے اور مزدوج محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر مزدوج محور کا جو طول منقطع ہوتا ہے وہ $\frac{ج ا^2}{ج ب}$ کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج کا ایک راس ا ثابت ہے اور دوسرے دو راس ب اور ج ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر زاویہ ا ہمیشہ ایک مستقل زاویہ عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے

پس ثابت ہوا کہ $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{اَ ع}} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$

نوٹ (۱)- چونکہ $\text{ا ع} \times \text{اَ ع} = (\text{ج ع} - \text{ج ا})(\text{ج ع} + \text{ج ا})$
$= \text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2$

اس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے۔

$$\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$$

یعنی $\frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2}{\text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2} - ۱$

یعنی $\frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2} - \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ج ب}^2} = ۱$

اب اگر ا ج اَ اور ب ج بَ کو حوالہ کے محور مانا جائے اور نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو ج ع = لا (فصلہ) اور ع ن = ما (معین)

اور نتیجہ بالا ہو جاتا ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$

چونکہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محدّد (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ رشتہ یعنی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ زائد کی مساوات ہے۔

نوٹ (۲)- اگر (لا، ما) زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ پر کا ایک نقطہ ہو تو نقاط (لا، - ما) اور (- لا، ما) بھی زائد کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے یہ نقطے بھی زائد پر ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ زائد حوالہ کے دونوں محوروں ا ج اَ اور ب ج بَ کے لحاظ سے متشاکل ہے۔ اس طریقہ سے اس امر کا متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ "زائد بلحاظ دو علی القوائم محوروں کے متشاکل ہے"۔

اس سے ظاہر ہے کہ مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف ج پر ہوتی ہے ۔ اس لیے مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کو زائد کا قطر کہتے ہیں۔

نوٹ (۳) زائد کی مساوات $\frac{لا^{2}}{ا^{2}} - \frac{ما^{2}}{ب^{2}} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ لا کی عددی قیمت ا سے چھوٹی نہیں ہو سکتی یعنی زائد کلیۃً اُن خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سروں ا، اَ میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور پر عمود وار ہیں۔

نیز ما ہر حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے یعنی قاطع محور کے متوازی ہر خط زائد کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔

امثلہ ۲۲

(۱) ا اَ ایک محدود خطِ مستقیم ہے ۔ ا اَ ممدودہ پر کے کسی نقطہ ع پر عمود ع ن ہے۔ اگر $\frac{ع ن^{2}}{ا ع \times اَ ع}$ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے جس کا قاطع محور ا اَ ہے ۔

(۲) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ا اَ ممدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ا اَ پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول دائرہ کے اُس مماس کے طول کے مساوی ہے جو ع میں سے کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس قطع زائد کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$ ہے ۔

(۳) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ا اَ ممدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ا اَ پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول اس مماس کے طول کے ساتھ جو ع میں دائرہ تک کھینچا گیا ہے ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے ۔

(۴) ن نَ دائرہ کا کوئی وتر ہے جو ایک ثابت قطر ا اَ پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا ن اور اَ نَ کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے ۔

(۵) ن ع نَ ناقص کا ایک دوہرا متعین ہے۔ ثابت کرو کہ

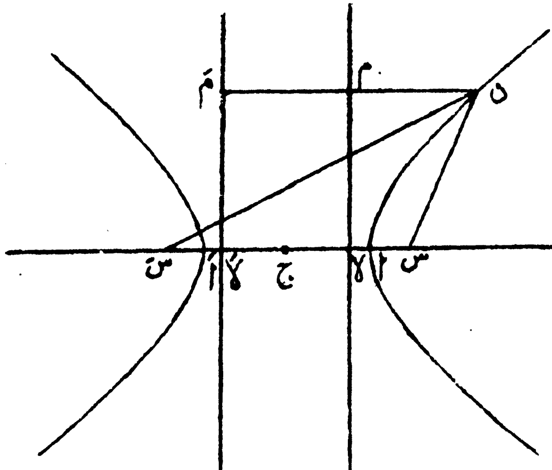
اںَ اور اَں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے ۔

(۶) زائد پر کے کسی نقطہ ن سے قاطع محور محدودہ پر عمود ن ع نکالا گیا ہے اور ع سے ۱۱َ قطر والے دائرہ کا ایک مماس ع ت کھینچا گیا ہے اگر زاویہ ع ج ت = ط تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے محدد (ا قط ط، ب مس ط) ہیں ۔

(۷) دفعہ ۶۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زائد متشاکل ہے بلحاظ خط ب ج بَ جو ج میں سے گزرتا ہے اور ۱۱َ پر عمود وار ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ زائد کا ایک اَور ماسکہ اور اس کے جواب کا ایک اَور مرتب ہے ۔

(۸) ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے ۔ اگر معیّن ع ن نقاط ن، ا، اَ میں سے گزرنے والے دائرہ سے مکرر نقطہ ک پر ملے تو ثابت کرو کہ ک کا طریق ایک زائد ہے ۔

۶۱ - **مسئلہ** ۔ زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل رہتا ہے اور قاطع محور کے مساوی ہوتا ہے ۔



فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے ۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ س ن ـ سَ ن = ۱۱َ

ن میں سے س کے جواب کے مرتب پر ن م اور سَ کے جواب کے مرتب پر عمود ن مَ نکالو - تب ن م مَ خطِ مستقیم ہوگا -

زائد کی تعریف کے بموجب سَ ن = ز × ن مَ

اور　س ن = ز × ن م

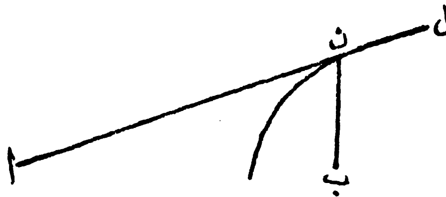
اس لیے　سَ ن ~ س ن = ز (ن مَ ~ ن م)

= ز × لَ ل = ا اَ

نوٹ (۱) اگر نقطہ ن زائد کی اُس شاخ پر ہو جس کے اندر ماسکہ س واقع ہے تو سَ ن - س ن = ا اَ اور اگر نقطہ ن زائد کی اُس شاخ پر ہو جس کے اندر ماسکہ سَ واقع ہے تو س ن - سَ ن = ا اَ

نوٹ (۲) اس مسئلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے زائد مرتسم کرنے کا مندرجۂ ذیل حیلی طریقہ (Mechanical method) حاصل ہوتا ہے -

ایک بے لچک رسّی کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ ب پر اور دوسرے سرے کو ایک سلاخ کے سرے ل پر باندھو - اب سلاخ کے دوسرے سرے کو ایک ثابت نقطہ ا کے گرد پھراؤ اور رسّی کو پنسل کی ایک نوک کے ذریعہ



اس طرح تنا کر رکھو کہ پنسل ہمیشہ سلاخ ل ا پر حرکت کرے - تب پنسل کی نوک سے

ایک قطع زائد مرتسم ہوگا جس کے ماسکے نقاط ا اور ب پر ہونگے ۔ کیونکہ پنسل کی نوک کے کسی مقام ن کے لیے

ا ن + ن ل = سلاخ کا طول اور ب ن + ن ل = رسّی کا طول

اس لیے ا ن ــ ب ن = سلاخ اور رسّی کے طولوں کا فرق جو مستقل ہے۔

اوپر کے حیلی عمل سے زائد کی صرف ایک شاخ مرتسم ہوتی ہے ۔ دوسری شاخ حاصل کی جاسکتی ہے اگر سلاخ کے ثابت سرے کو نقطہ ب کے گرد گھمایا جائے اور رسّی کے سرے کو ثابت نقطہ ا پر باندھ دیا جائے ۔

امثلہ ۲۳

(۱) زائد کے قاطع محور کے سروں اور ایک ماسکہ س کے مقام معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

(۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے ۔

(۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو دو دیے ہوئے دائروں کو مس کرے ۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۴) زائد کا مرکز، قاطع محور کا طول اور منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ ماسکوں کا طریق ایک اَور زائد ہے ۔

(۵) قطع ناقص کا ایک ماسکہ اور اُس پر کے دو نقطے دیے ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے ماسکہ کا طریق ایک قطع زائد ہے ۔

(۶) اگر دو زائدوں کے ماسکے مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ یہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع نہیں کرسکتے ۔

(۷) مکافی پر کے دو نقطے اور مکافی کے محور کی سمت معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکافی کے ماسکہ کا طریق ایک زائد ہے ۔

(۸) ایک مثلث کا قاعدہ اور نیز اندرونی دائرہ اور قاعدہ کا نقطۂ تماس معلوم ہیں ۔ ثابت کرو کہ مثلث کے رأس کا طریق ایک زائد ہے ۔

(۹) ایک محدود خط ا ب پر ایک ثابت نقطہ ج ہے۔ کوئی دائرہ خط ا ب کو نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ ا اور ب سے اس دائرہ کے مماسات کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

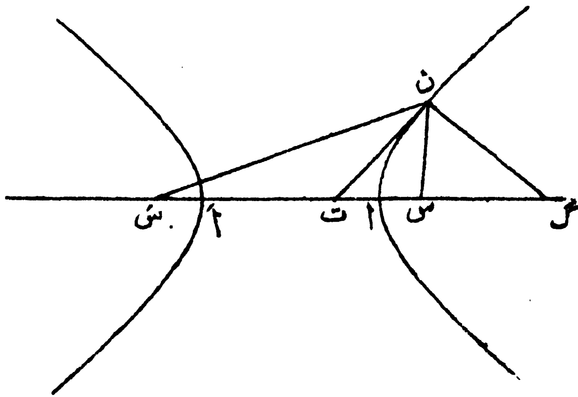
(۱۰) زائد کے ماسکے س اور سَ معلوم ہیں، نیز قاطع محور کا طول معلوم ہے۔ زائد پر کے متعدد نقطے معلوم کرو۔

(۱۱) اگر زائد کی سطح میں کوئی نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ق س ~ ق سَ قاطع محور سے بڑا ہوگا، مساوی ہوگا، چھوٹا ہوگا بموجب اس کے کہ نقطہ ق زائد کے اندر، زائد کے اوپر یا زائد کے باہر ہو۔

(۱۲) ناقص کا ایک ماسکہ س، ایک مماس اور ناقص پر کا ایک نقطہ ق معلوم ہیں۔ ناقص کے دوسرے ماسکہ سَ کا طریق معلوم کرو۔

[اشارہ ۔ مطلوبہ طریق ایک زائد ہے جس کا ایک ماسکہ ق پر ہے اور دوسرا ماسکہ س کے خیال پر ہے جو دیے ہوئے مماس میں لیا جائے]۔

۶۲۔ مسئلہ۔ زائد پر کے کسی نقطہ ن پر کے مماس اور عماد زاویہ س ن سَ کے بالترتیب خارجی اور داخلی منصِّف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا عماد، س سَ سے گ پر ملتا ہے

دفعہ ۱۹ کی رُو سے

س گ = ز × س ن

اور سَ گ = ز × سَ ن

اس لیے　س گ / سَ گ = س ن / سَ ن

اس لیے ن گ زاویہ س ن سَ کا ایک منصّف ہے۔

اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ ن گ زاویہ س ن سَ کا خارجی منصف ہے،

چونکہ سَ گ = ز × سَ ن، اس لیے سَ گ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ز × سَ ا ہے۔

یعنی　سَ گ > ز × اَ ا = سَ س

اس لیے نقطہ گ، سَ س ممدودہ پر واقع ہے۔

اس لیے ن گ زاویہ س ن سَ کا خارجی منصّف ہے

چونکہ ن پر کا مماس، ن پر کے عماد پر علی القوائم ہے

اس لیے ن پر کا مماس ن ت زاویہ س ن سَ کا داخلی منصف ہے۔

مسئلہ ۲۴

(۱) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ماسکوں س، سَ کے جواب کے مرتبوں سے بالترتیب ے، ےَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات ن س ے اور ن سَ ےَ متشابہ ہیں۔ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ ن پر کا مماس زاویہ س ن سَ کا اندرونی منصف ہے۔

[اشارہ۔ ن میں سے محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو مرتبوں سے م اور مَ پر ملے۔ تب　س ن / سَ ن = ن م / ن مَ = ن ے / ن ےَ

نیز زاویہ ن س ے = زاویہ ن سَ ےَ کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے۔

اس لیے　مثلثات　ن س ے اور ن سَ ےَ　متشابہ ہیں۔

اس لیے < س ن ے = < سَ ن ے

یعنی ن پر کا مماس زاویہ س ن سَ کا اندرونی منصف ہے]۔

(۲) ثابت کرو کہ قاطع محور کے کسی سرے پر کا مماس قاطع محور پر عمود وار ہے۔

(۳) زائد کا ایک ماسکہ اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا مماس معلوم ہیں۔ دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

(۴) زائد کا کوئی قطر ن ج نَ ہے۔ ن پر کا مماس س نَ سے نقطہ ت پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ س ن = س ت

(۵) اگر ایک ناقص اور ایک زائد کے دونوں ماسکے مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے کسی نقطۂ تقاطع پر کے مماسات ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ اگر دو منحنیوں کے نقطۂ تقاطع پر کے مماس ایک دوسرے پر عمود وار ہوں تو کہا جاتا ہے کہ منحنی اس نقطہ پر ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

اگر دو مرکز دار مخروطیوں کے دونوں ماسکے مشترک ہوں تو یہ مخروطی ہم ماسکہ مخروطی کہلاتے ہیں۔

ان تعریفات کی بناء پر اس سوال کے نتیجہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے

"اگر ایک ناقص اور زائد ہم ماسکہ ہوں تو وہ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں"۔

(۶) زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر مثلث ن س سَ کا حائط دائرہ مزدوج محور سے نقاط ﮪ اور ع پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ﮪ اور ن ع نقطہ ن پر کے مماس اور عماد ہیں۔

[اشارہ۔ چونکہ قوس س ع = قوس سَ ع اس لیے ن ع زاویہ س ن سَ کا ناصف ہے]۔

(۷) زائد کے نقطہ ن پر کا مماس مزدوج محور سے ع پر ملتا ہے۔

ثابت کرو کہ نقاط ن، س، ع، سَ مشترک المحیط ہیں۔

(۸) زائد کے نقطہ ن پر کا مماس قاطع محور سے ت پر اور مزدوج محور سے تَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\angle$ ن س تَ = $\angle$ ن ت سَ ۔

(۹) زائد پر کوئی نقطہ ن ہے۔ مرکز ج میں سے ن پر کے مماس کے متوازی خط کھینچا گیا ہے جو س ن اور سَ ن سے بالترتیب ع، عَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات ج س ع اور ج سَ عَ کے حائط دائرے مساوی ہیں۔

(۱۰) زائد کا ایک ماسکہ اور متناظر مرتب معلوم ہیں۔ نیز ایک دیا ہوا خط منحنی کو مس کرتا ہے زائد کے دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

۶۳ ـ مسئلہ ۔ اگر زائد کے ماسکوں س، سَ سے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود س ما، سَ مَا نکالے جائیں تو عمودوں کے پائیں ما اور مَا قطر ۲ أ والے دائرہ پر (جس کو امدادی دائرہ کہتے ہیں) واقع ہونگے نیز س ما × سَ مَا = ج ب²

فرض کرو کہ س ما ممدودہ اور سَ ن کا نقطۂ تقاطع ق ہے۔

ج ما کو ملاؤ۔

تب مثلثات ن ما س اور ن ما ق میں
زاویہ س ن ما = زاویہ ق ن ما
(کیونکہ ن پر کا مماس زاویہ س ن سَ کا داخلی ناصف ہے)
نیز زاویہ ن ما س = زاویہ ن ما ق (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اور ن ما دونوں مثلثات میں مشترک ہے ۔
اس لیے مثلثات ن ما س اور ن ما ق آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں
اس لیے س ما = ق ما اور س ن = ق ن
پس سَ ق = سَ ن ۔ ق ن = سَ ن ۔ س ن
= ۲ ا = ۲ ج ا
چونکہ مثلث س سَ ق میں س سَ کا وسطی نقطہ ج ہے
اور س ق کا وسطی نقطہ ما ہے
اس لیے ج ما = $\frac{1}{2}$ سَ ق = ج ا
اس لیے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے
اور نصف قطر ج ا ہے یعنی ما امدادی دائرہ پر واقع ہے ۔
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مَا بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے
اب اگر ما ج امدادی دائرہ سے کر، ما، پر ملے تو زاویہ ما مَا ما، قائمہ ہوگا کیونکہ ما ما، امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے ۔
لیکن بموجب عمل زاویہ ما مَا سَ بھی قائمہ ہے اس لیے مَا ما، سَ ایک خطِ مستقیم ہے
اب مثلثات ج س ما اور ج سَ ما، میں
ج س = ج سَ
ج ما = ج ما،
اور زاویہ س ج ما = زاویہ سَ ج ما،
اس لیے مثلثات ج س ما اور ج سَ ما، ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں
اس لیے س ما = سَ ما،

پس س ما × سَ مَا = سَ ما × س مَا = سَ اَ × سَ ا = ج ب^2

(بموجب دفعہ ۵۸)

فرع (۱) اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے مماس کے متوازی ہو اور س ن اور سَ ن سے بالترتیب نقاط ع اور عَ پر ملے تو

ن ع = ن عَ = ج ا

چونکہ ج ما // عَ ن اور ن ما // عَ ج

اس لیے ن ما ج عَ متوازی الاضلاع ہے

یعنی ن عَ = ج ما = ج ا

اسی طرح سے ن ع = ج ا

فرع (۲) اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے باہر س واقع ہے تو متغیر خط کا لفاف ایک زائد ہوگا جس کا ایک ماسکہ س ہے۔

فرع (۳) اگر ایک متغیر خط پر خط کی مخالف جانبوں کے دو ثابت نقطوں سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو متغیر خط کا لفاف ایک زائد ہوگا جس کے ماسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

امثلہ ۲۵

(۱) اگر امدادی دائرہ پر کے کسی نقطہ ما میں سے ایک خط ما ن کھینچا جائے جو ماس پر عمودوار ہے تو ثابت کرو کہ ما ن زائد کا ایک مماس ہوگا۔

(۲) اگر ایک زاویہ قائمہ کا راس ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے باہر کے ایک ثابت نقطہ س میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت زائد کو مس کریگی۔

(۳) اگر زائد کا ایک ماسکہ، ایک مماس اور قاطع محور کا طول معلوم ہوں تو دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔

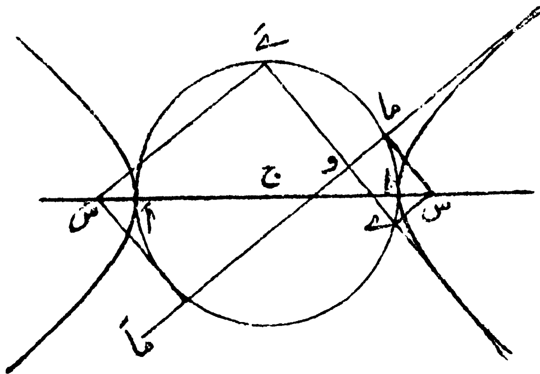
(۴) مرکز دار مخروطی کا ایک ماسکہ اور دو مماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ

مرکز کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔

(۵) مرکز دار مخروطی کا ایک ماسکہ اور تین مماس معلوم ہیں ۔ مخروطی کا مرکز اور دوسرا ماسکہ معلوم کرو ۔

(۶) ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے تین مماسوں سے بننے والے مثلث کا حائط دائرہ مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے نہیں گزر سکتا تا وقتیکہ مخروطی مکافی نہ ہو ۔

(۷) زائد کا ایک مماس امدادی دائرہ سے ما ماَ پر ملتا ہے ۔ ایک اَور مماس جو ما ماَ پر عمود وار ہے امدادی دائرہ سے ےَ ےَ پر اور ما ماَ سے و پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ و ما × و ماَ = ج ب^۲



[اشارہ ۔ و ما × و ماَ = س ے × سَ ےَ = ج ب^۲]

(۸) سوال بالا میں ثابت کرو کہ ج و^۲ = ج ا^۲ − ج ب^۲

[اشارہ ۔ و ما × و ماَ = ج ب^۲

یعنی ج ا^۲ − ج و^۲ = ج ب^۲ یعنی ج و^۲ = ج ا^۲ − ج ب^۲

نوٹ (۱) اس سوال سے ظاہر ہے کہ زائد کے دو علی القوائم مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا

مربع = نیم قاطع محور کا مربع ـ نیم مزدوج محور کا مربع - اس دائرہ کو زائد کا مرتب دائرہ کہتے ہیں۔

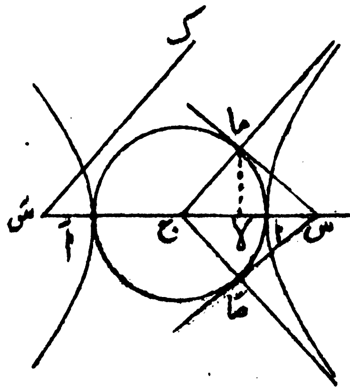
نوٹ (۲) زائد کے دو علی القوائم مماس صرف اُس صورت میں وجود رکھتے ہیں جبکہ زائد کے قاطع محور کا طول مزدوج محور کے طول سے بڑا ہو۔]

(۹) ایک دیے ہوئے نقطہ سے زائد کے مماسات کا جوڑا کھینچو۔

(۱۰) زائد کے مماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں۔

۶۴ - **تعریف** - اگر زائد کے نقطہ ن پر کا مماس ن ت ہو اور اگر ن منحنی پر حرکت کرکے لاتناہی کی طرف مائل ہو تو خط ن ت کے انتہائی مقام کو زائد کا ایک **متقارب** کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر متقارب منحنی کا وہ مماس ہے جس کا نقطۂ تماس لاتناہی پر ہے۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ زائد کے دو متقارب ہیں جو زائد کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔



ایک ماسکہ س میں سے امدادی دائرہ کے مماس س ما، س مَا کھینچو۔ تب ج ما، ج مَا (محدودہ) زائد کے متقارب ہونگے۔ چونکہ ما امدادی دائرہ پر کا

ایک نقطہ ہے اور ج ما عمود وار ہے س ما پر اس لیے دفعہ ۱۳ کے مسئلہ کے عکس کی رُو سے ج ما زائد کا ایک مماس ہے ۔ نیز اس کا نقطۂ تماس ن وہ نقطہ ہے جہاں یہ مماس خط سَ کَ کو قطع کرتا ہے جو کہ دوسرے ماسکہ سَ میں سے ج ما کے متوازی کھینچا گیا ہے اور چونکہ سَ کَ اور ج ما باہم متوازی ہیں اس لیے ان کا نقطۂ تقاطع ن لاتناہی پر ہے ۔ پس ثابت ہوا کہ ج ما زائد کا ایک متقارب ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج مَا بھی زائد کا ایک اور متقارب ہے ۔

ظاہر ہے کہ یہ دونوں متقارب زائد کے مرکز ج میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں ۔

اگر ایک متقارب اور قاطع محور کا درمیانی زاویہ عہ ہو تو

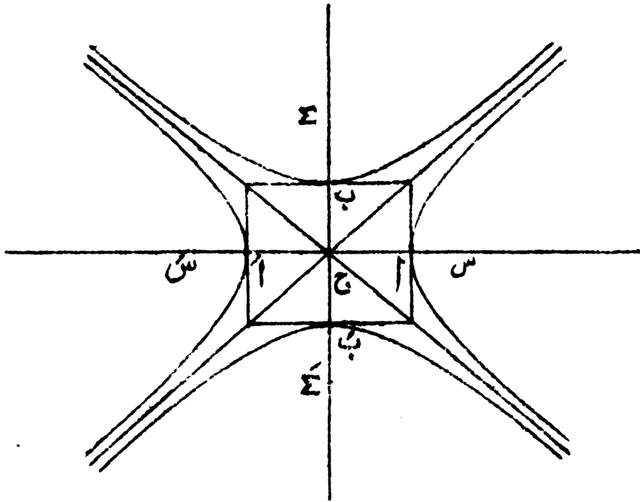
$$\text{قط عہ} = \frac{\text{ج س}}{\text{ج ما}} = \frac{\text{ا ز}}{\text{ا}} = \text{ز}$$

نیز اگر ما مَا قاطع محور سے لا پر ملے تو ج لا = ج ما × جم عہ = ا
یعنی لا مرتب اور قاطع محور کا نقطۂ تقاطع یعنی مرتب کا پائیں ہے اور ما مَا ماسکہ س کے جواب کا مرتب ہے ۔

پس ثابت ہوا کہ زائد کے متقارب امدادی دائرہ اور مرتب کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتے ہیں ۔

۶۵ - اگر قاطع محور کے سروں ا ، اَ میں سے ا اَ پر عمود وار خطوط کھینچے جائیں اور مزدوج محور کے سروں ب ، بَ میں سے ب بَ پر عمود وار خطوط کھینچے جائیں تو ان چار خطوط سے جو مستطیل بنتا ہے اس کے قطر زائد کے متقارب ہونگے ۔

ظاہر ہے کہ اس مستطیل کا ہر قطر زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے ۔



اگر اس مستطیل کا ایک قطر قاطع محور کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو مس عہ = ب/ا

یعنی قط² عہ = ۱ + ب²/ا² = ز² یعنی قط عہ = ز

پس معلوم ہوا کہ اس مستطیل کا ہر ایک قطر زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور قاطع محور کے ساتھ زاویہ قط⁻¹ ز بناتا ہے یعنی اس مستطیل کا ہر ایک قطر زائد کا ایک متقارب ہے۔

۶۶ - اگر ہمیں ایک زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے مقام اور طول معلوم ہوں تو زائد کی تعیین مکمل طور پر ہو جاتی ہے کیونکہ جب ا اَ اور ب بَ ثابت ہوں تو ماسکے س اور سَ قاطع محور ا اَ پر ہونگے اور اُن کے مقام کا تعین رشتہ ج س² = ج سَ² = ج ا² + ج ب² سے ہوگا۔

نیز خروج المرکز = ج س : ج ا اور اگر ا اَ پر نقاط لا، لاَ ایسے لیے جائیں کہ ج ا : ج لا = ز = ج ا : ج لاَ تو وہ خطوط جو لا، لاَ میں سے

گزرتے ہیں اور ۱۱َ پر عمودوار ہیں زائد کے مرتب ہونگے ۔

۶۷ - اب اگر ہم ایک زائد کھینچیں جس کے قاطع اور مزدوج محور بالترتیب ب بَ اور ۱۱َ ہوں (یعنی اول الذکر زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہوں) تو ظاہر ہے کہ اس زائد کے متقارب بھی وہی ہونگے جو اوّل الذکر زائد کے متقارب ہیں۔ مشترک متقاربوں سے بننے والے چار زاویوں میں سے اُن دو مقابل کے زاویوں ہیں جن کے اندر ۱، ۱َ واقع ہیں اول الذکر زائد واقع ہے اور دوسرے دو مقابل کے زاویوں میں جن کے اندر ب، بَ واقع ہیں دوسرا زائد واقع ہے۔ بلحاظ اول الذکر زائد کے موخرالذکر زائد کو مزدوج زائد کہتے ہیں ۔ ظاہر ہے کہ موخرالذکر زائد کے لحاظ سے اول الذکر زائد مزدوج زائد ہوگا ۔

کسی زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خروج المرکز بالعموم مساوی نہیں ہوتے ۔ اگر مزدوج زائد کا خروج المرکز زَ ہو تو $زَ = ۱ + \frac{۱^۲}{ب^۲}$ اور اگر ایک متقارب مزدوج زائد کے قاطع محور کے ساتھ زاویہ بہ بنائے تو $زَ = قط\ بہ = قط\ (۹۰^\circ - عہ) = قم\ عہ$ جہاں متقارب اور ج ۱ کا درمیانی زاویہ عہ ہے ۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱}{ز^۲} + \frac{۱}{زَ^۲} = جم^۲ عہ + جب^۲ عہ = ۱$$

زائد اور مزدوج زائد کے خروج المرکز صرف اُس صورت میں مساوی ہونگے جبکہ ب = ۱ یعنی جبکہ متقارب اور قاطع محور کا درمیانی زاویہ ۴۵° کا ہو ۔ اس خاص صورت میں متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوگا ۔

اگر زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں ۔ ظاہر ہے کہ اس صورت میں مزدوج زائد بھی قائم زائد ہوگا ۔ نیز ہر ایک کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$ ہوگا ۔

امثلہ ۲۶

(۱) قاطع محور کے ایک سرے ۱ پر کا مماس ایک متقارب سے

ف پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ج ف = ج س
(۲) ماسکہ س سے ایک متقارب پر عمود س ما نکالا گیا ہے ۔
ثابت کرو کہ ج ما = ج ا اور س ما = ج ب
(۳) اگر مزدوج زائد کے ماسکے ﻉ ، ﻉَ ہوں تو ثابت کرو کہ

ج ﻉ۲ = ج ﻉَ۲ = ج ا۲ + ج ب۲ = ج س۲

(۴) اگر وتر خاص محدودہ متقارب سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ
س ک = ز × ج ب
(۵) ثابت کرو کہ خط ا ب ایک متقارب کے متوازی ہے اور اس کی تنصیف دوسرا متقارب کرتا ہے ۔
(۶) ثابت کرو کہ کسی متقارب کے متوازی ایک خطِ زائد سے ایک اور صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے ۔
(۷) اگر ماسکہ س کے جواب کا مرتب ایک متقارب سے ما پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ما = ج ا اور ∠ ج ما س = قائمہ

(۸) زائد کا ایک متقارب، دوسرے متقارب کی سمت اور ایک ماسکہ معلوم ہیں ۔ زائد کے راس معلوم کرو ۔
(۹) اگر ایک زائد کے دونوں متقارب اور ایک ماسکہ (جو لازماً متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے ایک منصف پر ہوگا) دیے گئے ہوں تو مرتب معلوم کرو ۔
(۱۰) اگر زائد کا مرکز، ایک متقارب اور ایک مرتب معلوم ہوں تو ماسکے معلوم کرو ۔

۶۸ ۔ مسئلہ ۔ اگر زائد کے قاطع محور پر عمود وار کوئی خط زائد سے نقاط ن، نَ پر اور متقاربوں سے نقاط مر، مرَ پر ملے تو

مر ن × ن مرَ = مر ن × مر نَ = ج ب۲

فرض کرو کہ ن نَ قاطع محور سے ع پر ملتا ہے - نیز فرض کرو کہ ا پر کا مماس ایک متقارب ج ر سے ف پر ملتا ہے - تب اف = ج ب

تشابہ مثلثات ج ع ر ، ج اف میں

$$\frac{\text{ع ر}}{\text{ا ف}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ج ا}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ع ر}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ا}^2}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ع ر}^2 - \text{ج ب}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2}{\text{ج ا}^2} \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

لیکن

$$\frac{\text{ع ن}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2}{\text{ج ا}^2} \quad (۲)$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{ع ر}^2 - \text{ج ب}^2}{\text{ج ب}^2} = \frac{\text{ع ن}^2}{\text{ج ب}^2}$$

اس لیے $\text{ع ر}^2 - \text{ج ب}^2 = \text{ع ن}^2$

یعنی ع س² ۔ ع ن² = ج ب²

چونکہ ن نَ اور س سَ دونوں کی تنصیف ع پر ہوتی ہے اس لیے

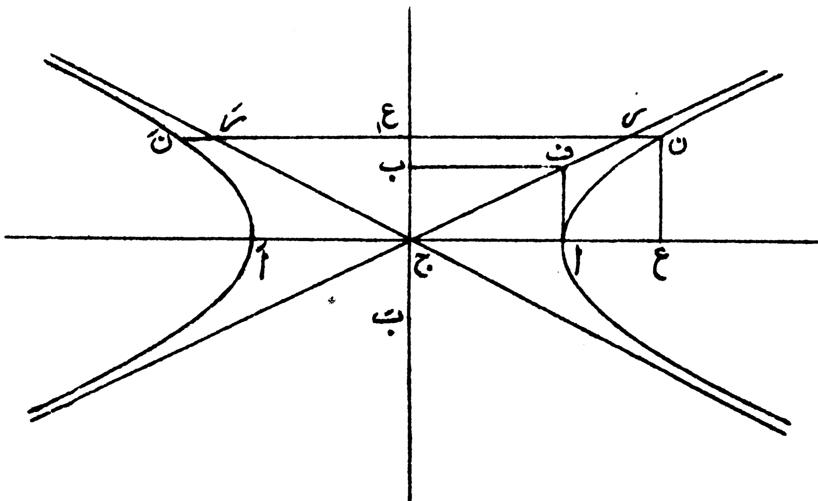
س ن = نَ سَ اور س نَ = ن سَ ۔

اس لیے س ن × س نَ = س ن × ن سَ = ع س² ۔ ع ن² = ج ب²

نوٹ ۔ جیسے جیسے معین ن ع کا پائیں ع مرکز ج سے دُور ہٹتا جاتا ہے ن ع کا طول بڑھتا جاتا ہے یعنی ن سَ کا طول بڑھتا جاتا ہے، اور چونکہ س ن × ن سَ مستقل رہتا ہے' اس لیے س ن کا طول بے حد گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے نقطہ ن منحنی پر حرکت کرکے لا انتہا ہی کی طرف جاتا ہے ۔ اس لیے متقارب ج س سے نقطہ ن کا عمودی فاصلہ بالآخر مائل بہ صفر ہوتا ہے ۔ پس معلوم ہوا کہ لا انتہا ہی پر متقارب منحنی کے بے حد قریب آجاتا ہے ۔

۶۹ ۔ مسئلہ ۔ اگر زائد کے قاطع محور کے متوازی کوئی خط زائد سے نقاط ن، نَ پر اور متقاربوں سے نقاط س، سَ پر ملے تو

ن س × ن سَ = ن س × س نَ = ج ا²



فرض کرو کہ ن نَ مزدوج محور سے ع_1 پر ملتا ہے۔

ن سے قاطع محور پر عمود ن ع نکالو۔

فرض کرو کہ راس ا پر کا مماس متقارب ج ر سے ف پر ملتا ہے،

تب ا ف = ج بَ اس لیے ب ف متوازی ہوگا ج ا کے

تب دفعہ ۶۰ کی رو سے
$$\frac{\text{ع ن}^2}{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$$

یعنی
$$\frac{\text{ج ع}_1^2}{\text{ع}_1\text{ن}^2 - \text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2} \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

نیز متشابہ مثلثات ج ع_1 ر اور ج ب ف میں
$$\frac{\text{ج ع}_1^2}{\text{ع}_1\text{ر}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ب ف}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2} \quad \dots (۲)$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے $\text{ع}_1\text{ن}^2 - \text{ج ا}^2 = \text{ع}_1\text{ر}^2$

یعنی $\text{ع}_1\text{ن}^2 - \text{ع}_1\text{ر}^2 = \text{ج ا}^2$

لیکن چونکہ ر رَ، ن نَ دونوں کی تنصیف نقطہ ع_1 پر ہوتی ہے

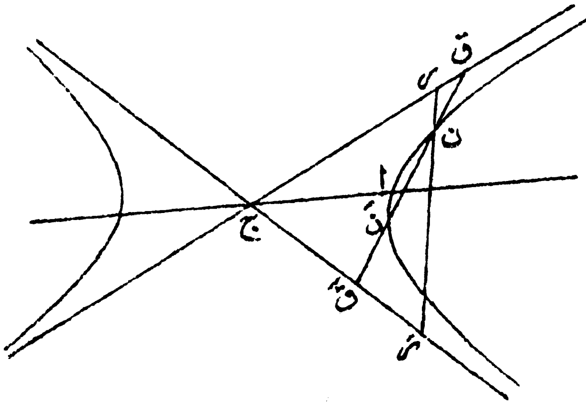
اس لیے ن ر = رَ نَ اور ن رَ = ر نَ

پس حاصل ہوتا ہے کہ ن ر × ن رَ = ن ر × ر نَ

$= \text{ع}_1\text{ن}^2 - \text{ع}_1\text{ر}^2 = \text{ج ا}^2$

۷۰۔ مسئلہ۔ اگر ایک دی ہوئی سمت میں کھنچا ہوا کوئی خط زائد سے نقاط ن، نَ پر اور متقاربوں سے نقاط ق، قَ پر ملے تو ن ق × ن قَ مستقل ہوگا۔

ن میں سے قاطع محور پر عمود وار ایک خط کھینچو جو متقاربوں سے ر، رَ پر ملے۔



چونکہ خط ق ن نَ قَ ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہے،
اس لیے مثلثوں ن ق ر اور ن قَ رَ میں سے ہر ایک کے زاویے غیر متبدل رہتے ہیں۔

اس لیے (ن ق / ن ر) مستقل ہے نیز (ن قَ / ن رَ) بھی مستقل ہے۔

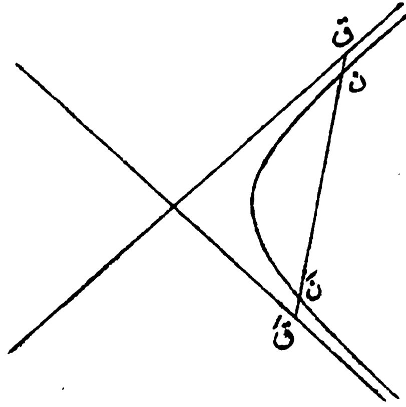
اس لیے (ن ق × ن قَ) / (ن ر × ن رَ) بھی مستقل ہے۔

لیکن دفعہ ۶۸ کی رو سے ن ر × ن رَ مستقل ہے۔
اس لیے ن ق × ن قَ بھی مستقل ہے بشرطیکہ خط ق قَ کی سمت نہ بدلے۔

فرع۔ ن ق × ن قَ = نَ ق × نَ قَ

۷۱۔ مسئلہ۔ اگر کوئی خط زائد سے نقاط ن، نَ پر اور متقاربوں سے نقاط ق، قَ پر ملے تو ن ق = نَ قَ

چونکہ ن ق × ن قَ = نَ ق × نَ قَ



اس لیے ن ق (ن نَ + نَ قَ) = (نَ ن + ن قَ) نَ قَ

یعنی ن ق × ن نَ + ن ق × نَ قَ = نَ ن × نَ قَ + ن ق × نَ قَ

یعنی ن ق × ن نَ = نَ ن × نَ قَ

یعنی ن ق = نَ قَ

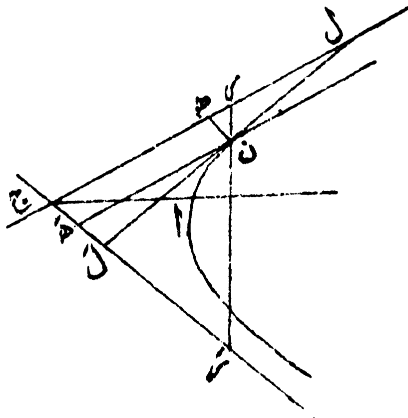
فرع (۱) ق قَ کا وسطی نقطہ ن نَ کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

فرع (۲) اگر زائد کے نقطہ ط پر کا مماس متقاربوں سے ل لَ پر ملے تو ل لَ کا وسطی نقطہ ط ہوگا۔

۷۲ ۔ **مسئلہ** ۔ زائد کے کسی مماس اور متقاربوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل لَ پر ملتا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن میں سے قاطع محور پر عمود وار خط متقاربوں سے مَ مَ پر ملتا ہے۔ ن میں سے متقارب ج مَ کے متوازی خط ن ھ کھینچو



جو دوسرے متقارب سے ھ پر ملے ۔ اور ن میں سے متقارب ج ر کے متوازی خط ن ھَ کھینچو جو دوسرے متقارب سے ھَ پر ملے ۔

فرض کرو کہ قاطع محور اور ایک متقارب کا درمیانی زاویہ عہ ہے

تب مثلث ن ر ھ میں

∠ ن ھ ر = ۲ عہ

∠ ھ ر ن = (۹۰° - عہ)

$$\therefore \frac{\text{ن ھ}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{جب (۹۰° - عہ)}}{\text{جب ۲ عہ}} = \frac{\text{جم عہ}}{\text{۲ جب عہ جم عہ}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ جب عہ}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{قم عہ}$$

اس لیے ن ھ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ن ر × قم عہ

اسی طرح سے مثلث ن رَ ھَ میں

ن ھَ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ن رَ × قم عہ

اس لیے ن ھ × ن ھَ = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ ن ر × ن رَ × قم² عہ

لیکن دفعہ ۶۸ کی رُو سے ن ر × ن رَ = ب²

اس لیے ن ھ × ن ھَ = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ ب² قم² عہ جو مستقل ہے

اب مثلث ج ل لَ میں ضلع ل لَ کا وسطی نقطہ ن ہے
اور ن ھ اور ن ھَ بالترتیب ج لَ اور ج ل کے متوازی ہیں
اس لیے مثلث ج ل لَ کا رقبہ = ۲ × متوازی الاضلاع ج ھ ن ھَ کا رقبہ

= ۲ × ج ھ × ج ھَ × جب ھ ج ھَ

= ۲ × ن ھَ × ن ھ × جب ۲ عہ

= ۲ × $\frac{۱}{۴}$ ب^{۲} قم^{۲} عہ × جب ۲ عہ

= $\frac{۱}{۲}$ ب^{۲} قم^{۲} عہ × ۲ جب عہ جم عہ

= $\frac{۱}{۲}$ ب^{۲} قم عہ × ۲ جم عہ

= ب^{۲} $\frac{\text{جم عہ}}{\text{جب عہ}}$ = ب^{۲} مم عہ = ب^{۲} × $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ = اب

فرع (۱) ج ل × ج لَ مستقل ہے کیونکہ مثلث ج ل لَ کا زاویہ ج مستقل ہے نیز اس مثلث کا رقبہ بھی مستقل ہے۔

فرع - اگر رأس ا پر کا مماس متقاربوں سے ف، فَ پر ملے تو
ج ل × ج لَ = ج ف × ج فَ = ج ف^{۲} = ج س^{۲}

امثلہ ۲۷

(۱) زائد کے متقارب اور زائد پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

اشارہ - دفعہ ۶۸ کا مسئلہ استعمال کرو۔

(۲) اگر دو متقاطع خطوطِ مستقیم ج س، ج سَ پر نقاط س، سَ اس طرح لیے جائیں کہ مثلث ج س سَ کا رقبہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ س سَ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ج س، ج سَ ہیں۔

(۳) زائد کے نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب سے ل پر ملتا ہے اور ل میں سے دوسرے متقارب کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے

ہے

جو زائد سے ق پر ملتا ہے۔ اگر ن ق ممدودہ متقاربوں سے ر، رَ پر ملے تو ثابت کرو کہ ر رَ کے نقاط تثلیث ن اور ق ہیں۔

(۴) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے اور مثلث ج ل لَ کا حائط دائرہ زائد کے محوروں سے گ، گَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ گ گَ نقطہ ن پر کا عماد ہے۔

[اشارہ۔ ∠ لَ ل گ + ∠ ل گ گَ = ∠ لَ ج گ + ∠ ل ج گَ
= ∠ گ ج ل + ∠ ل ج گَ = قائمہ

اس لیے ل لَ اور گ گَ ایک دوسرے پر عمود وار ہیں

نیز دائرہ ج ل لَ کا ایک قطر گ گَ ہے

اس لیے گ گَ، ل لَ کے وسطی نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور ل لَ پر عمود وار ہے۔

اس لیے گ گَ زائد کے نقطہ ن پر کا عماد ہے۔]

(۵) زائد کا ایک متقارب اور زائد پر کے تین نقطے معلوم ہیں زائد کو مرتسم کرو۔

(۶) زائد کا ایک متقارب، زائد پر کے دو نقطے اور ان نقطوں میں سے ایک پر کا مماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

(۷) زائد کے نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے اور ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ گ ل = گ لَ

(۸) زائد کا کوئی وتر ن نَ متقاربوں سے ق، قَ پر ملتا ہے اور اس وتر کے متوازی ایک مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے اور زائد کو ع پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق × ن قَ = ع لؔ

(۹) اگر زائد کے کوئی دو مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں اور متقاربوں کے نقاطِ تقاطع کو ملانے والے خطوط متوازی ہونگے۔

(۱۰) زائد کا ایک متقارب، دو مماس اور ان دو مماسوں میں سے ایک کا نقطۂ تماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

(۱۱) زائد کا کوئی مماس متقاربوں سے ل لَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ل لَ کو ایک معلوم نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا طریق ایک زائد ہے۔

(۱۲) زائد کا کوئی مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ل × ج لَ = ج سؔ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلثات ل ج س اور س ج لَ متشابہ ہیں۔

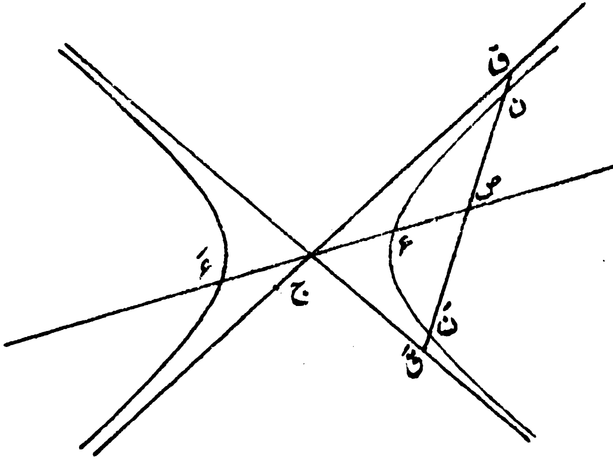
(۱۳) ایک متحرک خط دو ثابت خطوط سے مل کر مستقل رقبہ والا مثلث منقطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک خط ہمیشہ ایک زائد کو لف کرتا ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ قائم محوروں کے حوالہ سے مساوات لا ما = مستقل کی ترسیم ایک قائم زائد ہے۔

۷۳ - مسئلہ - اگر زائد کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خطِ مستقیم ہوگا جو زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ زائد کے متوازی وتروں کے ایک نظام کا کوئی ایک رکن زائد

نقاط ن، نَ پر اور متقاربوں سے نقاط ق، قَ پر ملتا ہے۔



فرض کرو کہ ن نَ کا وسطی نقطہ ص ہے تب دفعہ ا ء کی رُو سے ق قَ کا وسطی نقطہ بھی ص ہوگا۔

چونکہ ن نَ کی یعنی ق قَ کی سمت نہیں بدلتی اور نیز متقارب ج ق، ج قَ ثابت ہیں اس لیے ق قَ کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن نَ کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

تعریف۔ زائد کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خطِ مستقیم کو زائد کا **قطر** کہتے ہیں۔

فرع۔ اگر زائد کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر زائد سے نقاط ء، ءَ پر ملے تو ء، ءَ پر کے مماسات

اِن وتروں کے متوازی ہونگے۔

ع میں سے ایک خط دیے ہوئے وتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط زائد سے مکرر نقطہ ھ پر ملتا ہے چونکہ زائد کا وتر ع ھ دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے اس لیے ضروری ہے کہ ع ھ کا وسطی نقطہ قطر ع عَ پر واقع ہو اور یہ صرف اُسی صورت میں ممکن ہوسکتا ہے جبکہ نقطہ ھ نقطہ ع پر منطبق ہو اس لیے وہ خط جو ع میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ ع پر زائد کا مماس ہے۔ یعنی ع پر زائد کا مماس دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔

اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ عَ پر کا مماس بھی دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔

۴۷۔ مسئلہ۔ زائد کے کسی وتر کے سروں پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع اُس قطر پر واقع ہوتا ہے جو وترِ مذکور کی تنصیف کرتا ہے۔

فرض کرو کہ زائد کا ایک دیا ہوا وتر ن نَ ہے' ایک اور وتر ق قَ'

وتر ن نَ کے متوازی کھینچو - فرض کرو کہ ن نَ اور ق قَ کے وسطی نقطے ص، صَ ہیں -

تب ص، صَ میں سے گزرنے والا خط زائد کا ایک قطر ہوگا -

فرض کرو کہ ن ق قطر ج ص صَ سے ط پر ملتا ہے -

$$\text{تب}\quad \frac{\text{ص ط}}{\text{صَ ط}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{صَ ق}}$$

لیکن از روئے عمل ص ن = ص نَ اور صَ ق = صَ قَ

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{ص ط}}{\text{صَ ط}} = \frac{\text{ص نَ}}{\text{صَ قَ}}$$

اس لیے نَ قَ ط ایک خطِ مستقیم ہے -

یعنی ن ق، نَ قَ کا نقطۂ تقاطع ط زائد کے اُس قطر پر واقع ہے جو ن نَ کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرتا ہے -

اب فرض کرو کہ وتر ق قَ اپنے متوازی حرکت کرتا ہوا وتر ن نَ کے قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن نَ پر منطبق ہو جاتا ہے -

تب انتہا میں ن ق اور نَ قَ بالترتیب نَ اور ن پر کے مماس بن جائینگے -

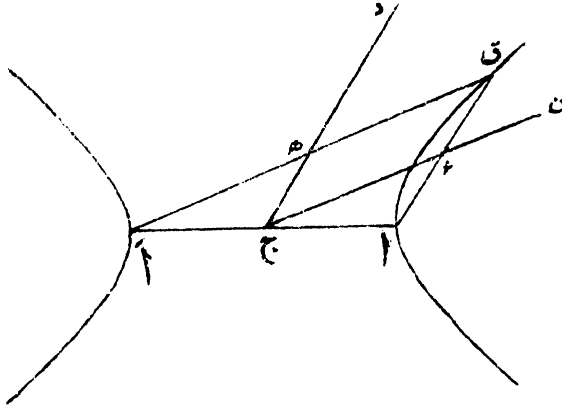
پس معلوم ہوا کہ وتر ن نَ کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو وترِ مذکور کی تنصیف کرتا ہے -

۷۵ - مسئلہ - اگر زائد کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا -

فرض کرو کہ زائد کا ایک قطر ج ن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے -

راس ا میں سے ج د کے متوازی وتر ا ق کھینچو اور اَ ق کو ملاؤ

فرض کرو کہ اق اور جن کا نقطۂ تقاطع ع ہے اور اَق اور ج د کا نقطۂ تقاطع ھ ہے۔



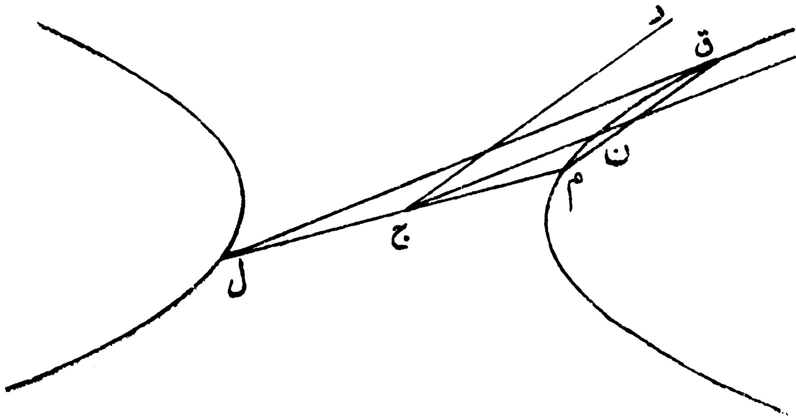
حسب مفروض اق کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔
مثلث اَق اؔ میں اق کا وسطی نقطہ ع ہے اور ااَ کا وسطی نقطہ ج ہے
اس لیے اَق، ج ع کے متوازی ہے۔
ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر اَق کا وسطی نقطہ ھ ہے
چونکہ ج ھ مثلث اَق ا کے ضلع ااَ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور ضلع اق کے متوازی ہے اس لیے اَق کا وسطی نقطہ ھ ہے، اس لیے اَق کے متوازی وتروں کی تنصیف ج د کرتا ہے۔
یعنی قطر جن کے متوازی وتروں کی تنصیف قطر ج د کرتا ہے۔

تعریف ۔ اگر زائد کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف دوسرا قطر کرے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف پہلا قطر کرے) تو اِن قطروں کو مزدوج قطر کہتے ہیں۔

نوٹ :۔ زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور مزدوج قطروں کی خاص صورت ہے۔

۷۶۔ تعریف۔ اگر زائد کے کسی قطر ن ج نَ کے سروں ن، نَ کو زائد کے کسی نقطہ ق سے ملایا جائے تو وتر ن ق اور نَ ق تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ زائد کے تکمیلی وتروں کے متوازی قطر مزدوج قطر ہوتے ہیں۔



زائد کے کسی نقطہ ق کو کسی قطر ل ج م کے سروں سے ملاؤ تب ق ل، ق م تکمیلی وتر ہونگے۔

مرکز ج میں سے ج ن، ج د بالترتیب ل ق، م ق کے متوازی کھینچو۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ج ن، ج د زائد کے مزدوج قطر ہیں۔

چونکہ مثلث ق ل م کے ضلع ل م کے وسطی نقطہ ج میں سے ج ن، ل ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اس لیے ج ن، م ق کی تنصیف کرتا ہے۔ اس لیے ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو م ق کے متوازی ہیں یعنی قطر ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج د کے متوازی ہیں۔

اس لیے قطر ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج ن کے متوازی ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں۔

امثلہ ۲۸

(۱) زائد کے وہ وتر کھینچو جن کے وسطی نقطے ایک دیے ہوئے قطر پر واقع ہیں۔

(۲) نقطہ و سے زائد کے دو مماس و ن، و ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج و اور ن ق مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ج ن کے مزدوج قطر کے متوازی ہے۔

(۴) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے اور ل میں سے مزدوج زائد کا ایک مماس ل د لٖ کھینچا گیا ہے جو مزدوج زائد کو نقطہ د پر مس کرتا ہے اور متقارب ج لَ کو لٖ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ل اور ج د ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور طول میں مساوی ہیں۔

[اشارہ۔ چونکہ مثلث ج ل لَ کا رقبہ
= مثلث ج ل لٖ کا رقبہ
اس لیے لَ لٖ کا وسطی نقطہ ج ہے۔
نیز ل لٖ کا وسطی نقطہ د ہے
اس لیے ج د متوازی ہے لَ ل کے اور ج د = ½ لَ ل = ن ل]

(۵) سوالِ بالا کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ ن د کا وسطی نقطہ متقارب ج ل پر ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث ج ن د کا رقبہ مستقل ہے۔

(۸) اگر ج ن، ج د زائد کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ یہ مزدوج زائد کے بھی مزدوج قطر ہیں۔

(۹) زائد کے مزدوج قطروں میں سے صرف ایک قطر زائد سے

حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔

(۱۰) زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقاط ن، نَ پر اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقاط د، دَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط ن، نَ د، دَ پر کے مماسات سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے جس کے راس متقاربوں پر ہیں اور جس کا رقبہ مستقل مقدار ۴ اب کے مساوی ہے۔

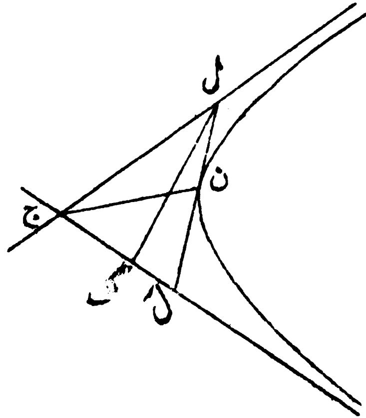
(۱۱) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب سے ل پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ج ن۲ ۔ ن ل۲ = ج ا۲ ۔ ج ب۲ (جو مستقل ہے)

فرض کرو کہ ن پر کا مماس دوسرے متقارب سے لَ پر ملتا ہے ل سے ج لَ پر عمود ل ک نکالو۔

چونکہ ل لَ کا وسطی نقطہ ن ہے اس لیے ج ل۲ + ج لَ۲

= ۲ ج ن۲ + ۲ ن ل۲

نیز ج ل۲ + ج لَ۲ ۔ ۲ ج لَ × ج ک = ل لَ۲ = ۴ ن ل۲



پس حاصل ہوتا ہے کہ ج لَ × ج ک = ج ن۲ ۔ ن ل۲

اب ج لَ × ج ک = ج لَ × ج ل × $\frac{\text{ج ک}}{\text{ج ل}}$ = مستقل

(کیونکہ ج لَ × ج ل مستقل ہے اور نیز $\frac{\text{ج لَ}}{\text{ج ل}}$ بھی مستقل ہے)۔

پس ثابت ہوا کہ ج ن^2 - ج لَ^{2} مستقل ہے۔

اب اگر مماس کا نقطۂ تماس راس ا پر آجائے تو

ج ن^2 - ن لَ^{2} = ج ا^2 - ج ب^2

(۱۲) اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن پر اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ن^2 - ج د^2 = ج ا^2 - ج ب^2

نوٹ (۱)۔ اگر دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن پر اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ ق پر ملے تو ج د کے طول کو نیم قطر ج ن کے مزدوج قطر کا طول کہتے ہیں۔

نوٹ (۲) اوپر کے سوال میں زائد کے مزدوج قطروں کے متعلق ذیل کا مسئلہ ثابت ہوا ہے۔ "زائد کے نیم مزدوج قطروں کے مربعوں کا فرق مستقل ہوتا ہے"

(۱۳) اگر دیا ہوا زائد قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ ج ن = ج د نیز ثابت کرو کہ ج ن، ج د متقارب کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۱۴) ثابت کرو کہ قائم زائد کا کوئی وتر اور اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والا قطر کسی متقارب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ قائم زائد کے تکمیلی وتروں کا کوئی زوج کسی متقارب سے مساوی زاویے بناتا ہے۔

(۱۶) قائم زائد پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے اور اس کے مزدوج زائد پر ایک نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ زاویہ ج ن د قائمہ ہے ثابت کرو کہ

ج ن = ج د

امثلہ ۲۹

(زائد پر متفرق سوالات)

(۱) کاغذ پر ایک زائد کھینچا ہوا ہے۔ اس کے ضروری اجزا معلوم کرو۔

(۲) زائد کی ایک ہی شاخ پر کے دو نقطوں ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع و ہے۔ ثابت کرو ∠ س و ن + ∠ سَ و نَ = ۲ قائمے

[اشارہ۔ فرض کرو کہ ن اور نَ زائد کی اُس شاخ پر ہیں جس کے اندر ماسکہ س ہے۔ فرض کرو کہ س نَ، سَ ن سے ھ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\angle \text{س و ن} = ۲ \text{ قائمے} - \tfrac{1}{2} \times \angle \text{س ھ سَ}$$

نیز ثابت کرو کہ $\angle \text{سَ و نَ} = \tfrac{1}{2} \times \angle \text{س ھ سَ}$]

(۳) زائد کی مختلف شاخوں پر کے دو نقطوں ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع و ہے، ثابت کرو کہ $\angle \text{س و ن} = \angle \text{سَ و نَ}$

[اشارہ۔ فرض کرو کہ س نَ اور سَ ن ایک دوسرے کو ھ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle \text{س و ن} = \tfrac{1}{2} \times \angle \text{س ھ ن}$

اور $\angle \text{سَ و نَ} = \tfrac{1}{2} \times \angle \text{سَ ھ نَ}$]

(۴) زائد کا کوئی مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ل لَ کے محاذی کسی ایک ماسکہ پر مستقل زاویہ بنتا ہے۔

(۵) ایک خط ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت علی القوائم خطوط و ا، و ب سے ا اور ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اب کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

[اشارہ۔ و ن کے وسطی نقطہ ج میں سے و ا، و ب کے متوازی خطوط ج ︎ل، ج ما کھینچو۔ ثابت کرو کہ ج ل، ج ما سے اب کے

وسطی نقطہ کے عمودی فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔]

(۶) زائد کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو زائد کے ایک متقارب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۷) قائم زائد پر کے دو نقطے اور مرکز معلوم ہیں۔ قائم زائد کو مرتسم کرو۔

[اشارہ — اگر دیے ہوئے نقطوں ن اور نَ کو ملانے والے وتر کا وسطی نقطہ ص ہو اور اگر ن نَ متقاربوں سے ر، رَ پر ملے تو ج ص = ص ر = ص رَ اور اس کی مدد سے متقارب کھینچ سکتے ہیں]

(۸) ایک دی ہوئی سمت میں کھنچا ہوا کوئی خط دو ثابت زائدوں سے جن کے متقارب مشترک ہیں نقاط ن، نَ اور ق، قَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق × ق نَ مستقل ہے۔

(۹) کوئی خط زائد کے متقاربوں سے ر، رَ اور مزدوج قطروں کے کسی ایک زوج سے ن، نَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ر، رَ کی موسیقی تقسیم ن، نَ پر ہوتی ہے۔

[اشارہ — فرض کرو کہ ج ن زائد سے ء پر ملتا ہے، ء پر کا مماس ج نَ کے متوازی ہوگا اگر ء پر کا مماس متقاربوں سے ل، لَ پر ملے تو ل ء = ء لَ اس لیے ج (ر ن رَ نَ) موسیقی پنسل ہے۔ اس لیے ر رَ کی موسیقی تقسیم ن، نَ پر ہوتی ہے۔

(۱۰) زائد پر کے دو نقطوں ق، قَ پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع و ہے، و میں سے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو متقاربوں سے م، مَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ م مَ، ق قَ کے متوازی ہے۔

[اشارہ۔ فرض کرو کہ ق قَ متقاربوں سے ر، رَ پر ملتا ہے۔ تب ج و، ر رَ کے وسطی نقطہ میں سے گزریگا۔ نیز چونکہ ج م و مَ متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج و، م مَ کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے یعنی ر رَ اور م مَ دونوں کے وسطی نقطے ج و پر واقع ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ ر رَ // م مَ]

(۱۱) ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو دو ثابت خطوط و لا، و ما سے ق، قَ پر ملتا ہے اور ق قَ پر نقطہ نَ اس طرح لیا گیا ہے کہ ق نَ = قَ ن۔ ثابت کرو کہ نَ کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب و لا، و ما ہیں۔

(۱۲) ا ب ج د ایک مربع ہے۔ ایک قائم زائد کھینچا ہے جس کے متقارب ا ب، ا د ہیں اور ایک ماسکہ ج ہے۔ ثابت کرو کہ یہ زائد اضلاع ج ب، ج د کے وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

ضمیمہ (الف)

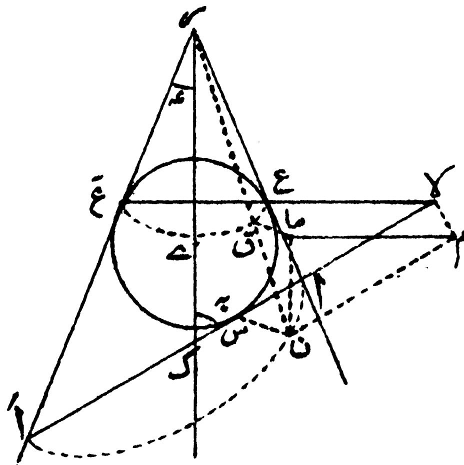
مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں

تاریخی نوٹ — مخروطات کے خواص کے ابتدائی انکشافات Menaechmus سے منسوب کیے جاتے ہیں جو چوتھی صدی قبل مسیح میں گزرا ہے۔ مخروطات پر سب سے پہلی منتظم بحث اقلیدس (۳۲۳ تا ۲۸۵ قبل مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کی تھی۔ لیکن یہ کتاب اب کالعدم ہے۔ Appolonius (۲۴۷ تا ۲۰۵ قبل مسیح) کی مشہور کتاب "Kωvikα" کا ماخذ اقلیدس کی مذکورہ بالا کتاب ہی تھی۔ Appolonius کی اس کتاب میں مخروطات کے غیر ماسکی خواص پر نہایت مکمل بحث درج ہے۔ اور نیز یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مستدیر مخروط کو مختلف میلان والی مستوی سطحوں سے قطع کرنے سے مخروطی کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ مخروطی کی مختلف قسموں کے نام بھی Appolonius ہی کے وضع کردہ ہیں۔

مخروطات کی ماسکہ مرتب خاصیت کا ذکر پہلے پہل Pappus (۳۰۰ سال بعد مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کیا ہے۔ مگر اس اہم خاصیت پر Newton کے زمانہ تک کوئی قابلِ لحاظ تحقیقات وجود میں نہیں آئیں۔ نیوٹن کی کتاب Principia میں اس خاصیت اور اس کے مستنبطات پر مدلل بحث مندرج ہے۔ حقیقی ماسکوں کے نظریہ کی تشریح Kepler (۱۵۷۱ تا ۱۶۳۰ء) نے کی ہے اور لفظ "Focus" اسی کا وضع کردہ ہے۔ لیکن وہ طریقہ جس میں مستدیر مخروط کی مستوی تراش کی

ماسکہ مرتب خاصیت کی تحقیق میں ماسکی کرہ کا استعمال کیا گیا ہے۔ Dandelin (۱۸۲۲ء) اور Morton (۱۸۲۵ء) کا ایجاد کردہ ہے۔

مسئلہ - اگر ایک قائم مستدیر مخروط کا نیم راسی زاویہ عہ ہو اور اگر ایک سطح مستوی ایسی کھینچی جائے جو مخروط کے محور کے ساتھ زاویہ بہ بنائے تو مستوی تراش ایک مخروطی ہوگی جس کا خروج المرکز قط عہ جم بہ ہوگا



مخروط کے اندر ایک کرہ بناؤ جو مخروط کو دائرہ ع ق عَ پر اور سطح تقاطع کو س پر مس کرے ۔ اس کرہ کا مرکز ے مخروط کے محور رک پر واقع ہے جو سطح تقاطع کو ک پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح، سطح رک س ہے جو مخروط کو خطوط را، راَ پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مستوی سطح اور مخروط کے منحنئ تقاطع پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔

فرض کرو کہ مستوی ع ق عَ قاطع سطح ا ن اَ کو م لا پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ ن سے سطح ع ق عَ پر عمود ن ما ہے اور فرض کرو کہ

ر ن مستوی ع ق عَ کو ق پر قطع کرتا ہے۔ ما ق کو ملاؤ اور ما سے لام پر عمود مام نکالو۔ ن م کو ملاؤ۔ مستوی ا ن اَ میں نقطہ س میں سے گزرنے والا ہر خط کرہ (سے) کا مماس ہے اور اس لیے س سے ر (جو کاغذ کی سطح میں ہے) عمود وار ہے۔ اس لیے مستوی ا ن اَ کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے نیز سطح ع ق عَ بھی کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے۔

اس لیے مستویوں ع ق عَ اور ا ن اَ کا خطِ تقاطع لام کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے اور اس لیے خط ا اَ پر عمود وار ہے۔

چونکہ ن ما سطح ع ق عَ پر عمود وار ہے اور ما م خط لام پر عمود وار ہے، اس لیے ن م خط لام پر عمود وار ہے۔

اس لیے ن م متوازی ہے ا اَ کے

نیز ن ما متوازی ہے ر ک کے کیونکہ ان میں سے ہر ایک خط سطح ع ق عَ پر عمود وار ہے۔

اس لیے ∠ ما ن م = ∠ ر ک ا = ب

نیز ∠ ق ن ما = ∠ ق ر ک = مخروط کا نیم راسی زاویہ عہ

اب مثلث ق ن ما میں، ∠ ق ما ن = °۹۰

اس لیے ق ن = ن ما × قط عہ

مثلث ن ما م میں ∠ ن ما م = °۹۰

اس لیے ن ما = ن م × جم ب

اس لیے ق ن = ن م قط عہ جم ب

لیکن ن ق = ن س کیونکہ دونوں کرہ (سے) کے مماس ہیں۔

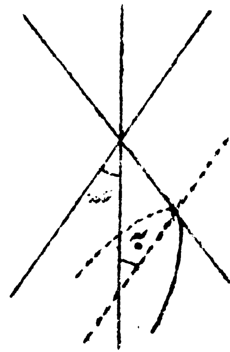
اس لیے س ن = ن م × قط عہ جم ب

اس لیے $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}}$ = قط عہ جم ب = مستقل

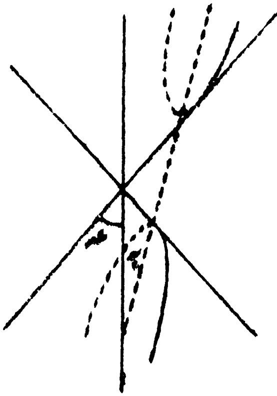
اس لیے ن کا طریق ایک مخروطی ہے جس کا ماسکہ س ہے، مرتب لام ہے اور خروج المرکز قط عہ جم ب ہے۔

فرع ۔ایک دیے ہوئے مخروط کی مختلف مستوی تراشوں کے ۔ یہ مخروطی تراش
کا خروج المرکز ز ایسے بدلتا ہے جیسے جم بہ

نوٹ (۱) اگر بہ = عہ تو ز = ۱
تب قاطع مستوی مخروط کے ایک تکوینی خط کے متوازی ہوگا اور مخروطی تراش ایک
مکافی ہوگی (دیکھو شکل ذیل ۱) ۔



شکل ۱



شکل ۲

اگر بہ > عہ تو ز < ۱
تب مخروطی تراش ایک ناقص ہوگی
اگر بہ < عہ تو ز > ۱
تب قاطع مستوی دُہرے مخروط کی دونوں شاخوں کو قطع کریگا اور مخروطی تراش
زائد ہوگی ۔ (دیکھو شکل بالا ۲)

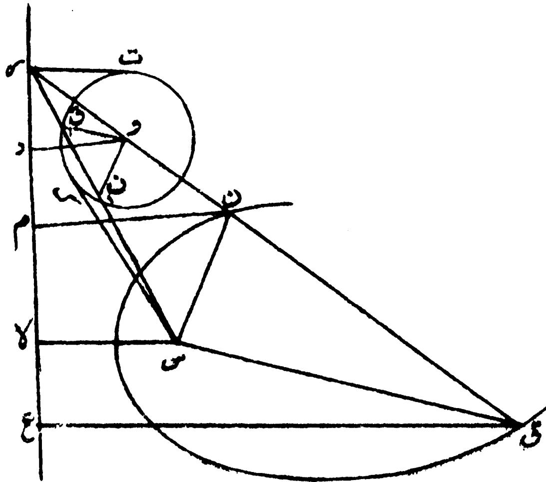
نوٹ (۲) کرہ (سے) کو ماسکی کرہ کہتے ہیں کیونکہ یہ کرہ قاطع سطح مستوی کو
مخروطی تراش کے ایک ماسکہ پر مس کرتا ہے ۔

ضمیمہ (ب)

نیوٹن کا مسئلہ۔ اگر کسی نقطہ و سے دی ہوئی سمتوں میں دو خط کھینچے جائیں جو ایک دیے ہوئے مخروطی سے نقاط ن، ق اور نَ، قَ پر ملیں تو

$$\frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ونَ} \times \text{وقَ}}$$

مستقل ہوگا۔



فرض کرو کہ خطِ مستقیم و ن ق مرتب سے ر پر ملتا ہے، و سے مرتب پر عمود و د نکالو اور و کو مرکز مان کر ر × ود نصف قطر والا دائرہ کھینچو۔ س ر کو ملاؤ اور فرض کرو کہ س ر دائرہ و سے نقاط $ن_1$، $ق_1$ پر

ملتا ہے۔

ن، ق سے مرتب پر عمود ن م، ق ع نکالو۔

تب $\frac{\text{س ن}}{\text{ن}_1\text{ و}} = \frac{\text{ز} \times \text{ن م}}{\text{ز} \times \text{و د}} = \frac{\text{ن م}}{\text{و د}} = \frac{\text{ن ر}}{\text{و ر}}$

اس لیے شکل بالا میں مثلثات ر ن س اور ر و ن_1 متشابہ ہیں

اس لیے ن س متوازی ہے ن_1 و کے

اسی طرح سے ق س متوازی ہے ق_1 و کے

فرض کرو کہ خطِ مستقیم و ن ق مخروطی کے مرتبا سے زاویہ ط بناتا ہے۔

س اور ر سے دائرہ (و) کے مماس س ک اور ر ت کھینچو۔

چونکہ $\text{ن س} \parallel \text{و ن}_1$ اس لیے $\frac{\text{و ن}}{\text{و ر}} = \frac{\text{س ن}_1}{\text{ر ن}_1}$

نیز چونکہ $\text{ق س} \parallel \text{و ق}_1$ اس لیے $\frac{\text{و ق}}{\text{و ر}} = \frac{\text{س ق}_1}{\text{ر ق}_1}$

اس لیے $\frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر}^2} = \frac{\text{س ن}_1 \times \text{س ق}_1}{\text{ر ن}_1 \times \text{ر ق}_1} = \frac{\text{س ک}^2}{\text{ر ت}^2}$

اب $\text{ر ت}^2 = \text{و ر}^2 - \text{د ت}^2 = \text{و ر}^2 - \text{ز}^2 \times \text{و د}^2$

اور چونکہ $\angle \text{و ر د} = \text{ط}$ اس لیے $\text{و د} = \text{و ر} \times \text{جب ط}$

اس لیے $\text{ر ت}^2 = \text{و ر}^2 - \text{ز}^2 \times \text{و ر}^2 \text{جب}^2\text{ط} = \text{و ر}^2(1 - \text{ز}^2 \text{جب}^2\text{ط})$

اس لیے $\text{و ن} \times \text{و ق} = \text{س ک}^2 \times \frac{\text{و ر}^2}{\text{ر ت}^2}$

$$= \frac{\text{س ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{جب}^2\text{ط}}$$

اگر خط وَن قَ مرتب سے زاویہ طَ بنائے تو حسب بالا ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\text{و نَ} \times \text{و قَ} = \frac{\text{س ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{جب}^2\text{طَ}}$

اس لیے $\dfrac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ونَ} \times \text{وقَ}} = \dfrac{\text{۱ - ز}^2 \text{ جب}^2 \text{ طہَ}}{\text{۱ - ز}^2 \text{ جب}^2 \text{ طہ}}$ جو مستقل ہے۔

نوٹ (۱) مسئلہ بالا کے استعمال میں یاد رہے کہ ون، وق، ونَ، وقَ کے طول لینے میں مقدار اور علامت دونوں ملحوظ رکھے جانے چاہئیں۔

نوٹ (۲) اس نتیجہ کی کئی ایک اہم خاص صورتیں ہیں۔

(۱) اگر ون ق اور ونَ قَ کے متوازی ماسکی وتر ع س ھ اور عَ س ھَ ہوں تو $\dfrac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ونَ} \times \text{وقَ}} = \dfrac{\text{س ع} \times \text{س ھ}}{\text{س عَ} \times \text{س ھَ}} = \dfrac{\text{ع ھ}}{\text{عَ ھَ}}$

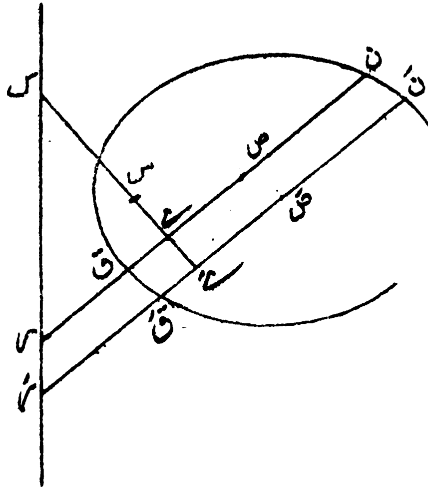
(۲) اگر ون ق اور ونَ قَ کے متوازی مماسات ط ے اور طَ ےَ ہوں تو $\dfrac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ونَ} \times \text{وقَ}} = \dfrac{\text{طے} \times \text{طے}}{\text{طَےَ} \times \text{طَےَ}} = \dfrac{\text{طے}^2}{\text{طَےَ}^2}$

(۳) مرکزدار مخروطی کی صورت میں اگر ون ق اور ونَ قَ کے متوازی قطر د ج دَ اور ع ج عَ ہوں تو $\dfrac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ونَ} \times \text{وقَ}} = \dfrac{\text{ج د} \times \text{ج دَ}}{\text{ج ع} \times \text{ج عَ}} = \dfrac{\text{ج د}^2}{\text{ج ع}^2}$

نوٹ (۳) نیوٹن کے مسئلہ کی مدد سے دفعات ۲۶، ۴۴ اور ۶۰ کے نتائج بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

(ج)
ضمیمہ

مسئلہ۔ مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو اُس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں ماسکہ میں سے وتروں پر کا عمود متناظر مرتب سے ملتا ہے۔



فرض کرو کہ متوازی وتروں کے دیے ہوئے نظام کا ایک رکن ن ق ہے اور اُس کا وسطی نقطہ ص ہے۔
فرض کرو کہ ماسکہ س سے ن ق پر کا عمود ن ق سے ح پر اور ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

تب $\frac{\text{س ن}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{س ق}}{\text{ق ر}}$

اس لیے $\frac{\text{س ن}^2 - \text{س ق}^2}{\text{ن ر}^2 - \text{ق ر}^2} = \frac{\text{س ن}^2}{\text{ن ر}^2}$

لیکن $\text{س ن}^2 - \text{س ق}^2 = \text{ے ن}^2 - \text{ے ق}^2 = 4\,\text{ص ے} \times \text{ص ن}$

نیز $\text{ن ر}^2 - \text{ق ر}^2 = 4\,\text{ر ص} \times \text{ص ن}$

اس لیے $\frac{\text{س ن}^2}{\text{ن ر}^2} = \frac{4\,\text{ے ص} \times \text{ص ن}}{4\,\text{ر ص} \times \text{ص ن}} = \frac{\text{ے ص}}{\text{ر ص}}$

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا کوئی اور وتر نَ قَ ہے اور اُس کا وسطی نقطہ صَ ہے۔

نیز فرض کرو کہ یہ وتر س ک سے سَ پر اور مرتب سے رَ پر ملتا ہے۔

تب حسب بالا $\frac{\text{سَ نَ}^2}{\text{نَ رَ}^2} = \frac{\text{ے سَ}}{\text{رَ صَ}}$

نیز $\frac{\text{س ن}}{\text{ن ر}} = \frac{\text{سَ نَ}}{\text{نَ رَ}}$ کیونکہ ن اور نَ مخروطی پر کے نقطے ہیں اور ن ر ∥ نَ رَ

اس لیے $\frac{\text{ے ص}}{\text{ر ص}} = \frac{\text{ے صَ}}{\text{رَ صَ}}$

لیکن ر رَ اور ے ےَ کا نقطۂ تقاطع ک ہے

اس لیے نقطہ صَ بھی ک ص پر واقع ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیے ہوئے نظام کے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو ک میں سے گزرتا ہے۔

نوٹ (۱) مرکزدار مخروطی کی صورت میں چونکہ مرکز میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف مرکز پر ہوتی ہے اس لیے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

مخروطی کے مرکز میں سے گزرنے والا خط ہے۔

نوٹ (۲) چونکہ مکافی کا دوسرا راس اَ لاتناہی پر ہوتا ہے اس لیے ا اَ کا وسطی نقطہ ج (یعنی مکافی کا مرکز) بھی لاتناہی پر ہے اس لیے مکافی کی صورت میں متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق مکافی کے محور سے لاتناہی پر ملتا ہے یعنی مکافی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

اغلاط نامہ

ہندسی مخروطات

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۳	پیشانی	مخرفطات	مخروطات
۳۵	"	مخرطبوں	مخروطیوں
"	۲	مَ ا س کے	مَ ا س محدودہ کے
"	۲۱	ن ن	ن نَ
۴۰	شکل میں		م ۱
۴۲	شکل ۲	ع	ع
۴۹	۱	منطبو	منطبق
۵۲، ۵۹	۱۳، ۶	ہں	ہیں
۶۶	۱۰	دَ مکافی	دَ اور مکافی
"	۱۴	ملالو	ملاؤ
۷۳	۱	گدورنے	گذرنے
"	۷	مکافی	مکافی
۸۶	۲		ن

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸۸	۴	۵ تا ۱۱۰	۵ تا ۱۰)
"	شکل کے دائیں جانب	لا	لاَ
۸۸	شکل کے بائیں جانب	لاَ	لا
۹۱	شکل میں		خَ
۹۴	۱۴	ج ب۲ / ج ا	ج ب۲ / ج ا۲
۹۷	۱،۲		جم
۱۰۳	۱۱	ن×۶س×ہ×س ہ / و(۱+ز)	ن×۶س×ہ×س / و(۱+ز)
۱۰۷	پیشانی	مخروطات	مخروطات
۱۰۸	۱۷	مَ ما	مَ ما۱

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۱۰	۱۸	ماس	مَاسَ
۱۱۷	شکل میں		ام
۱۱۸	۱		دیا
۱۲۰	داہنی شکل میں	ج	ج۱
"	بائیں شکل میں	ج۱	ج
۱۲۲	بالائی بائیں شکل میں		ص۱
"	زیریں شکل میں		ھ
۱۲۳	۲۳		مزدوج
۱۲۶	شکل میں		ب
۱۳۱	۲۱	مفادیر	مقادیر
۱۳۲	۳	ج ب / س ح	ج ب / س خ
۱۴۰	۱۳		دیے
۱۴۳	۱۸	مانسکہ	ماسکہ
۱۶۱	۲۳	گررتا	گزرتا
۱۶۷	شکل میں		ق۱
۱۸۱	۱۴	نقطہ٬ تقاطع	نقطۂ تقاطع